Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 3ª prova - 29/06/2011 - 9h25m

Questão 1 (8 pontos). Sejam $z = f(x, y)$ função diferenciável, $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\theta$. Use a Regra da Cadeia para verificar a equação

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Solução. Como $z = f(x, y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\text{sen}\,\theta$, temos que, pela Regra da Cadeia,

$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(\cos\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(\text{sen}\,\theta)$,

$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\text{sen}\,\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(r\cos\theta)$

$\Rightarrow (\frac{\partial z}{\partial \theta})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2 = (\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\text{sen}\,\theta)^2 + \frac{1}{r^2}(r(-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\text{sen}\,\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\theta))^2 =$

$(\frac{\partial z}{\partial x})^2\cos^2\theta + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\text{sen}^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{r^2}\cdot r^2((\frac{\partial z}{\partial x})^2\cos^2\theta + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\text{sen}^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\text{sen}\,\theta)$

$= (\frac{\partial z}{\partial x})^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + (\frac{\partial z}{\partial y})^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$

$= (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$

Questão 2 (9 pontos). Determine os máximos e mínimos locais e os pontos de sela, se houver, da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy.$$

Solução. Os pontos críticos satisfazem: $f_x = 3x^2 - y = 0,\ f_y = 3y^2 - x = 0.$
Resolvendo,
$y = 3x^2 \ \rightarrow\ 3(3x^2)^2 - x = 27x^4 - x = x(27x^3 - 1) = 0$
$\rightarrow\ ''x = 0$ e $y = 0''$, ou $''x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{1}{3}''$. Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
E, como $f_{xx} = 6x,\ f_{yy} = 6y,\ f_{xy} = -1$ e $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36xy - 1$, então,
$D(0, 0) = -1\ \rightarrow\ \boxed{(0, 0)}$ **é um ponto de sela.**
$D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{36}{9} - 1 = 4 - 1 = 3,\ f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 2 > 0$ e $\boxed{(0, 0)}$ **é um mínimo local.**

Questão 3 (9 pontos). Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ restrita ao círculo centrado na origem $(0, 0)$ e raio 5.

Solução. Procuramos os valores máximo e mínimo da função $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$, usando multiplicadores de Lagrange. Queremos achar as soluções do sistema $\nabla f = \lambda\,\nabla g,\ g = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} 8x - 4y = \lambda\,(2x) \\ 2y - 4x = \lambda\,(2y) \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 8x - 4y = \lambda\,(2x) \\ 4y - 8x = \lambda\,(4y) \\ 0 = \lambda\,(2x + 4y) \end{cases}$$

o que abre duas possibilidades,

$$\begin{cases} x = -2y \;\rightarrow\; 4y^2 + y^2 = 5y^2 = 25, \;,\; y = \pm\sqrt{5},\; \mp 2\sqrt{5}, \text{donde} \\ \boxed{T(\mp 2\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}) = 16(5) + 8(5) + 5 = 125}, \text{ou} \\ \\ \lambda = 0 \;\rightarrow\; y = 2x \;\rightarrow\; x^2 + 4x^2 = 25,\; x^2 = 5,\; x = \pm\sqrt{5},\; y = \pm 2\sqrt{5} \\ \boxed{T(\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5}) = 4(5) - 8(5) + 4(5) = 0} \end{cases}$$

O valor máximo e o valor mínimo de $T(x, y)$ sobre o círculo centrado na origem $(0, 0)$ e raio 5 são, respectivamente 125 e 0.

Questão 4 (8 pontos). Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y$ é a do vetor $(1, 1)$.

Solução. O gradiente de f no ponto $P(x, y)$ é paralelo ao vetor $(1, 1)$; existe λ tal que $(2x, 2y - 4) = \lambda(1, 1)$,

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y - 4 = \lambda \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} \rightarrow\; 2x = 2y - 4 \\ \rightarrow\; x = y - 2 \\ \rightarrow\; \boxed{y = x + 2} \end{cases}$$

E os pontos (x, y) nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y$ é a do vetor $(1, 1)$, estão sobre a reta $y = x + 2$.