Segunda Prova de Cálculo III - 18/05/2013
ENTREGUE SOMENTE ESSA FOLHA COM AS RESPOSTAS ASSINALADAS

Nome: ______________________________ **Turma:** ________

---

1. A área da superfície do cilindro $x = 4 - y^2$ que está acima do plano xy e abaixo do plano $z = x$ é dada por

$$(a)\quad 2\pi \qquad (b)\quad \int_{-2}^{2}(4-t^2)\sqrt{1+4t^2}dt \qquad (c)\quad \int_{0}^{2} 1+4t^2dt \qquad (d)\quad \int_{-2}^{2} t\sqrt{1+4t^2}dt$$

Resposta: (b). Resolução: Seja C a curva no plano xy que é a parte da parábola $x = 4 - y^2$ com $-2 \le y \le 2$. Para cada (x, y) a altura da parte cilíndrica varia de $z = 0$ até $z = x$. Portanto, parametrizando C por: $x = 1 - t^2$ e $y = t$, com $-2 \le t \le 2$, temos $ds = \sqrt{(-2t)^2 + 1^2}dt = \sqrt{1+4t^2}dt$ e a área pedida é

$$A = \int_C xds = \int_{-2}^{2}(4-t^2)\sqrt{1+4t^2}dt.$$

---

2. A integral

$$\int_C (\cos(x^3) - y^3)dx + (ye^{y^3} + x^3)dy$$

em que C é a cincunferência $x^2 + y^2 = 4$ orientada na sentido horário é dada por

$$(a)\quad -6\pi\int_0^2 x^3dx \qquad (b)\quad 0 \qquad (c)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2drd\theta \qquad (d)\quad -\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2drd\theta$$

Resposta: (a). Resolução: Utilizando o Teorema de Green na região D interior à circunferência C, obtemos (o sinal de menos se deve à orientação negativa de C)

$$\begin{aligned}
\int_C (\cos(x^3) - y^3)dx + (ye^{y^3} + x^3)dy &= -\int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(ye^{y^3} + x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x^3) - y^3)\right] dA \\
&= -\int\int_D \left[3x^2 + 3y^2\right] dA \\
&= -3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 rdrd\theta \\
&= -3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3dr = -6\pi\int_0^2 r^3dr.
\end{aligned}$$

Obs.: Obviamente, $-6\pi\int_0^2 r^3dr = -6\pi\int_0^2 x^3dx$.

---

3. Seja C a **semi**-cincunferência $x^2 + y^2 = 1$, com $y \ge 0$, percorrida no sentido anti-horário. A integral

$$\int_C \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy$$

é dada por

$$(a)\quad 0 \qquad (b)\quad -\frac{\pi}{2} \qquad (c)\quad \frac{\pi}{2} \qquad (d)\quad -\pi$$

Resposta: (b). Resolução: Seja Γ a parte superior da elípse $x^2+4y^2=1$ (com $y \geq 0$) orientada no sentido **horário**. Seja D a região limitada pela curva fechada $C \cup \Gamma$. Pelo Teorema de Green (note que em D o campo $\left\langle -\frac{x}{x^2+4y^2}, \frac{y}{x^2+4y^2} \right\rangle$ é bem definido) temos

$$\int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{x^2+4y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+4y^2})\right] dA = \int_C \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy + \int_\Gamma \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{x^2+4y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+4y^2}) = -\frac{x^2+4y^2-x2x}{(x^2+4y^2)^2} - \frac{x^2+4y^2-y8y}{(x^2+4y^2)^2} = 0$$

e

$$\int_\Gamma \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy = \int_\Gamma ydx - xdy = -\int_0^\pi \left[\frac{\operatorname{sen} t}{2}(-\operatorname{sen} t) - \cos t(\frac{\cos t}{2})\right] dt = \frac{\pi}{2}$$

temos

$$0 = \int_C \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy + \frac{\pi}{2},$$

ou seja $\int_C \frac{y}{x^2+4y^2}dx - \frac{x}{x^2+4y^2}dy = -\frac{\pi}{2}$.

Observação: Não podemos utilizar o Teorema de Green na região formada por C e pelo segmento de reta $y=0$ com $-1 \leq x \leq 1$, pois esse segmento passa pela origem e o campo em questão não é definido nesse ponto.

---

4. Considere o campo de vetores $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, 2xy+e^{3z}, 3ye^{3z})$

(1) Uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$ é dada por

(a) $f(x,y,z) = yx^2 + ye^{3z}$
(b) $f(x,y,z) = xy^2 + ze^{3z}$
(c) $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z}$
(d) $f(x,y,z) = xy^2 + xe^{3z}$

Resposta: (c). Resolução: $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \Longrightarrow f = y^2x + h(y,z) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial h}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z}$. Como também devemos ter $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{3z}$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z}$, concluímos que

$$\frac{\partial h}{\partial y} = e^{3z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = 3ye^{3z}.$$

Assim, integrando a primeira equação em relação a y encontramos $h = ye^{3z} + g(z)$. Daí $\frac{\partial h}{\partial z} = 3ye^{3z} + g'(z)$. Comparando esta última com a segunda acima concluímos que $g'(z) = 0$. Portanto, $g(z) = c$ e, escolhendo $c = 0$, obtemos

$$f = y^2x + ye^{3z}.$$

Obs.: calculando o gradiente de cada alternativa também concluiríamos que a opção correta é (c).

(2) O valor de

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t^2,\ \mathrm{sen}(\pi t),\ t - 1/2)$, $0 \leq t \leq 1/2$ é

(a) $17/16$ $\quad$ (b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}e^{-3/2}$ $\quad$ (c) $5/4$ $\quad$ (d) $1/2$

Resposta: (c). Resolução: $\vec{r}(1/2) = \big(1/4, \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}), 0\big) = (1/4, 1, 0)$ e $\vec{r}(0) = (0, 0, -1/2)$. Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f\,(1/4, 1, 0) - f(0, 0, -1/2) = \frac{1}{4}1^2 + 1e^0 - 0 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$