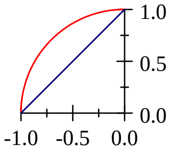
**Primeira Prova de Cálculo III - 13/04/2013**

---

**1.** Considere a integral dupla

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y)dxdy.$$

(a) Desenhe e determine a região de integração $D$. Resp.: $D$ está no segundo quadrante, entre a circunferência $x = -\sqrt{1-y}$ (em vermelho na figura) e a reta $x = y - 1$ (em azul).




$$D = \left\{(x,y) : 0 \le y \le 1 \quad \text{e} \quad -\sqrt{1-y} \le x \le y-1\right\}.$$

(b) Escreva a integral trocando a ordem de integração. Resp.: $\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$.

---

**2.** Considere a seguinte desigualdade

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_5^6 5\,\text{sen}(y^3)\,e^{-x^2-y^2}dxdy \ge 5.$$

(a) Diga se a desigualdade é verdadeira ou falsa. Resp.: Falsa.

(b) Justifique a sua resposta do item anterior. Resp.: O resultado da integral dupla é zero. Após aplicar o Teorema de Fubini a integral se transforma num produto de duas integrais. Uma delas, $\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(y^3)e^{-y^2}dy$, é zero porque o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação à $y = 0$.

---

**3.** Seja $E$ a região sólida correspondente a calota esférica acima do plano $z = \sqrt{3}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Escreva a integral correspondente ao volume da região $E$

(a) utilizando coordenadas cilíndricas na ordem de integração $dzdrd\theta$. Resp.: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta$.

(b) utilizando coordenadas esféricas na ordem de integração $d\rho d\phi d\theta$. Resp.: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\phi}}^{2} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.