Terceira Prova de Cálculo III - 29/06/2013

Nome: ______________________________ **Turma:** ________

---

1. Assinale a alternativa que corresponde à integral $\int\int_S (3x^2 + 3z^3)dS$ em que S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com normal exterior.
Res.: Temos $\overrightarrow{n} = \langle x, y, z\rangle$ e $3x^2 + 3z^3 = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}$, em que $\overrightarrow{F} = \langle 3x, 0, 3z^2\rangle$. Logo,

$$\int\int_S (3x^2+3z^3)dS = \int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \int\int\int_E \text{div}\,\overrightarrow{F}dV = \int\int\int_E (3+6z)dV = 3V(E) = \boxed{4\pi}.$$

---

2. Assinale a alternativa que corresponde à área da parte do plano $2x + 2y + z = 2$ interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$.
Res.: $A = \int\int_S dS = \int\int_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}dA = \int\int_D \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2}dA = 3A(D) = 3 \times 4\pi = \boxed{12\pi}$, pois a fronteira de D é a circunferência $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (a projeção da interseção do parabolóide com o plano é dada pela equação $x^2 + y^2 = 2 - 2x - 2y$).

---

3. Sejam $\overrightarrow{F} = \langle e^x y, z^2 e^y, xe^y + \cos(3z^2 + 1)\rangle$ e C é interseção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido horário quando projetada no plano xy. Assinale a alternativa que corresponde à integral de linha $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, calculada via Teorema de Stokes:
Res.: A curva C é fronteira da superfície S, parte do plano $z = 1$ limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$,com normal $\overrightarrow{n} = \langle 0, 0, -1\rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &= \int\int_S \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS\\ &= \int\int_S \langle \_, \_, -e^x\rangle \cdot \langle 0, 0, -1\rangle\, dS\\ &= \int\int_S e^x dS = \boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^1 re^{r\cos\theta}drd\theta}.\end{aligned}$$

---

4. Assinale a alternativa que corresponde ao fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\langle x, y, z\rangle$ através do elipsóide $S : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ orientado com o normal apontando para fora.
Res.: $\overrightarrow{F}$ não é definido em $(0, 0, 0)$ e este ponto está na região limitada por S. Logo, aplicando-se o Teorema da Divergência à região E limitada por S e pela esfera S_1,orientada com normal $\overrightarrow{n} = -\langle x, y, z\rangle$, tem-se (note que div $\overrightarrow{F} = 0$ em E):

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS + \int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \int\int\int_E \text{div}\,\overrightarrow{F}dV$$

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS + \int\int_{S_1} (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\langle x,y,z\rangle \cdot -\langle x,y,z\rangle\, dS = \int\int\int_E 0dV$$

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS - \int\int_{S_1} (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x^2+y^2+z^2)dS = 0$$

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS - \int\int_{S_1} dS = 0$$

Portanto, $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = A(S_1) = \boxed{4\pi}$.

Fórmulas

1) Se S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(u,v)$ com $(u,v) \in D$, então:
   a) $dS = \|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}\|\, dA$
   b) $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}) dA$.

2) Se $\overrightarrow{F} = \langle P, Q, R \rangle$ e S é da forma $z = z(x,y)$ com $(x,y) \in D$, então:
   a) $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dA$
   b) $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\int_D (-P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x,y,z)) dA$.

3) Para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$:
$\overrightarrow{r}(\phi,\theta) = \langle a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \phi \rangle$, $\overrightarrow{r_\phi} \times \overrightarrow{r_\theta} = a \sin \phi \overrightarrow{r}(\phi,\theta)$ e $dS = a^2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta$.