Cálculo I: 2a prova, 16/05/2015, 10h00, **Duração: 1h40**. JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS! $\boxed{\text{A}}$

1. (**15pts**) Estude $f(x) = \exp(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4})$ (onde $\exp(\cdots)$ significa "exponencial na base e"), incluindo: domínio, sinal, assíntotas (se tiver), variação, posição dos pontos de máx./mín. locais (se tiver), gráfico detalhado.

Temos $D = \mathbb{R}$, e $f(x) > 0$ para todo x (não possui raizes), e f não possui assíntotas verticais já que é contínua em todo ponto (**2pts**)*. (Observe que como $f(-x) = f(x)$, f é par.) Como $x^4/4$ é o termo de grau maior, podemos escrever*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\right)}_{\to -\frac{1}{4}} = -\infty\,, \qquad \text{o que implica } \lim_{x\to\pm\infty} \exp(+\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4}) = 0\,.$$

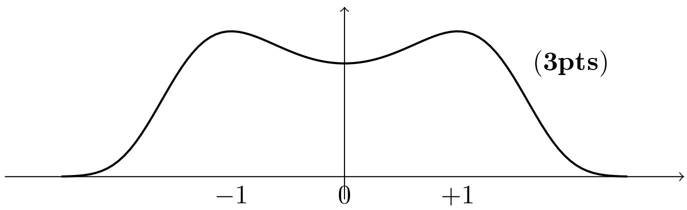
Portanto, a reta $y = 0$ (o eixo x) é assíntota horizontal quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ (**3pts**)*. Calculando a primeira derivada, usando a regra da cadeia,*

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)' e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}} = (x - x^3)e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}} = x(1 - x^2)e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}}\,.(\mathbf{3pts})$$

Como a exponencial é sempre > 0, o sinal de $f'(x)$ obtem-se a partir do sinal de $x(1-x^2)$. Portanto, a variação é dada por (**2pts**)

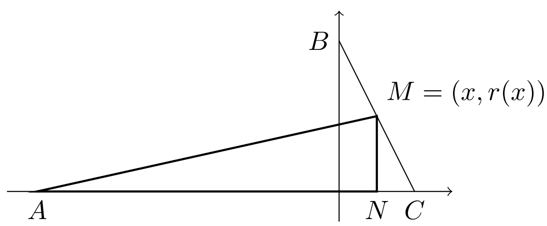
x		-1		0		$+1$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Variaç. de f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Assim, f possui um máximo local em $(-1, f(-1)) = (-1, e^{\frac{1}{4}})$, um mínimo local em $(0, f(0)) = (0, 1)$, um máximo local em $(+1, f(+1)) = (+1, e^{\frac{1}{4}})$ (**2pts**)*. Juntando essas informações obtemos o gráfico:*



(**3pts**)

2. (**13pts**) Sejam $A = (-2, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (\frac{1}{2}, 0)$ pontos no plano cartesiano. Sejam M um ponto no segmento BC, entre B e C, e N a projeção vertical de M no eixo x. Monte e resolva um problema de otimização para achar o ponto M que maximiza a área do triângulo AMN.



Escrevamos $M = (x, r(x))$, onde $r(x) = -2x + 1$ é a equação da reta que passa por B e C. Como M está entre B e C, precisamos restringir $x \in [0, 1/2]$. Para um x fixo, a área do triângulo AMN tem base igual a $x - (-2) = x + 2$, e altura igual a $r(x)$. Logo, a sua área é dada por $a(x) = \frac{1}{2}(x+2)(-2x+1)$. Assim, ***queremos achar o máximo global de*** $a(\cdot)$ ***no intervalo*** $[0, 1/2]$ (**6pts**)*. Procuremos primeiro os pontos críticos de $a(\cdot)$ em $(0, 1/2)$. Como $a(x)$ é derivável em todo x (sendo um polinómio de grau 2), esses pontos críticos só podem ser pontos onde a sua derivada se anula. Ora,*

$$a'(x) = \tfrac{1}{2}\big((x+2)(-2x+1)\big)' = \tfrac{1}{2}(-4x - 3)\,,$$

que é nula se e somente se $x = -\frac{3}{4}$ (**3pts**)*, que está fora de $(0, 1/2)$. Portanto, $a(x)$ não possui pontos críticos em $(0, 1/2)$, e deve atingir seu máximo global na fronteira. Como $a(1/2) = 0$ e $a(0) = 1$, vemos que o máximo global de $a(x)$ é atingido em $x = 0$, logo* ***o ponto*** M ***que maximiza a área do triângulo é*** $M = (0, r(0)) = (0, 1) \equiv B$. (**4pts**)

3. (**7pts**) Justificando cada passo do método que for usar, calcule: $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}(x^2) - x^2}{x^6}$.

O limite é da forma "$\frac{0}{0}$". Mas o numerador e o denominador são ambas funções deriváveis na vizinhança de $x = 0$, e o denominador (assim como a sua derivada) só se anula em $x = 0$ (**2pts**)*. Portanto, podemos usar a Regra de BH, e tentar calcular primeiro o limite*

$$\lim_{x\to0} \frac{(\text{sen}(x^2) - x^2)'}{(x^6)'} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x^2)2x - 2x}{6x^5} = \tfrac{1}{3}\lim_{x\to0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4}(\mathbf{2pts})$$

Este último limite é também da forma "$\frac{0}{0}$", e as mesmas hípoteses citadas acima são verificadas. Podemos então tentar derivar de novo para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x^2)-1)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(x^2)2x}{4x^3} = -\tfrac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} = -\tfrac{1}{2}\,.(\mathbf{2pts})$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)-x^2}{x^6} = -\frac{1}{6}\,.(\mathbf{1pts})$$

Para simplificar, podia ter começado chamando $z = x^2$, e transformar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)-x^2}{x^6} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\text{sen}(z)-z}{z^3}\,.$$

Aí, as derivadas ficam um pouco mais simples.

4. (BÔNUS) Existe um ponto do intervalo $[0,\pi]$ em que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 + \text{sen}(x)$ é igual a π^2? (Dica: Teorema de Rolle.)

   Observe que f é derivável. Logo, pelo corolário do Teorema de Rolle, sabemos que existe $c \in (0,\pi)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi - 0} = \frac{\pi^3 - 0}{\pi - 0} = \pi^2\,.$$

   Logo, a resposa é SIM. (**5pts**). *(Podia também observar que $f'(x) = 3x^2 + \cos(x)$ é contínua, $f'(0) = 1 < \pi^2$, $f'(\pi) = 3\pi^2 - 1 > \pi^2$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário deve existir um ponto c entre 0 e π em que $f'(c) = \pi^2$.)*