Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 3ª prova - 16/11/2011 - Turma D

1. Calcule o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

(a) (4 pontos) Multiplicando e dividindo por y^2, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+2y^2} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y^2} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} = \boxed{0}$,

onde o último limite sai do teorema do confronto e de que

$0 \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+2y^2)y^2}{x^2+2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0.$

(b) (4 pontos) Multiplicando acima e embaixo pelo conjugado, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = \boxed{2}$

2. **(10 pontos).** Se $z = xy + xe^{y/x}$, mostre que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Solução. $z = xy + xe^{y/x}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{y/x} + x\, e^{y/x}(\frac{-y}{x^2}) = y + e^{y/x} - \frac{y}{x}\, e^{y/x} = y + \frac{(x-y)}{x}\, e^{y/x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\frac{1}{x}\, e^{y/x} = x + e^{y/x}$

Donde,

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (xy + (x-y)\, e^{y/x}) + (xy + y\, e^{y/x}) = xy + (xy + x\, e^{y/x}) = xy + z.$

3. **(8 pontos).** Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x,y) = 1+4x-5y$ na região triangular fechada D com vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,3)$.

Solução. $f(x,y) = 1+4x-5y$

(i) Primeiro, para $f(x,y)$ restrita à **fronteira do disco** , temos três casos.

Se $y = 0$, $0 \le x/ \le 2$ e a função é $f(x,0) = 1+4x$, que não tem pontos críticos. Os valores extremos são os das extremidades do intervalo, $\boxed{f(0,0) = 1}$, $\boxed{f(2,0) = 9}$

Se $x = 0$, $0 \le y \le 3$, $f(0,y) = 1-5y$, $f(0,0) = 1$ e o único valor novo é $\boxed{f(0,3) = -14}$

Se $y = -\frac{3}{2}x+3$, $f(x, -\frac{3}{2}x+3)1 + 4x - 5(-\frac{3}{2}x+3) = \frac{23}{2}x - 14$, $f(0,3) = -14$ e $f(0,0) = 1$ (Os valores se repetem).

(ii) Em segundo lugar, $f(x,y) = 1+4x-5y$ não tem pontos críticos e portanto não há máximos nem mínimos locais no **interior do disco**.

Logo, o valor mínimo é $\boxed{f(0,3) = -14}$ e o valor máximo é $\boxed{f(2,0) = 9}$

4. **(8 pontos).** Determine os máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

Solução. $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$. Calculamos as derivadas parciais até a 2a ordem,

$$f_x = ye^{-x^2-y^2} - 2x^2ye^{-x^2-y^2} = (1-2x^2)ye^{-x^2-y^2}, \ f_y = (1-2y^2)xe^{-x^2-y^2},$$

$$f_{xx} = (-4x)ye^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)ye^{-x^2-y^2}(-2x) \Rightarrow \boxed{f_{xx} = 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2}}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2) + ye^{-x^2-y^2}(-2y)(1-2x^2) \Rightarrow \boxed{f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)(1-2y^2)}$$

$$\boxed{f_{yy} = 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2}}$$

Pontos críticos: $f_x = 0, \ f_y = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$ ou $1 - 2x^2 = 0$

Se $y = 0$ então, $x = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{(x,y) = (0,0)}$

Se $1 - 2x^2 = 0$, então, $x = \pm 1/\sqrt{2}, \ y = \pm 1/\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \boxed{(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \ (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \ (x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \ (x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$$

Analisamos agora o tipo de cada ponto crítico.

Para $(0,0)$ temos $D(0,0) = -1 \ \Rightarrow \ \boxed{(x,y) = (0,0)}$ **é um ponto de sela.**

Para os outros pontos $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ temos $f_{xy} = 0$ e $D(x,y) = D(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-2} > 0$, pois

$D(x,y) = D(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (e^{-1})\,(e^{-1}) - 0 = e^{-2} = D(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$,

$D(x,y) = D(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-e^{-1})\,(-e^{-1}) - 0 = e^{-2} = D(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

e o $f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow \boxed{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$ e $\boxed{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$ **são máximos locais.**

Finalmente, para $(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, temos

$f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} > 0$

$\Rightarrow \boxed{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$ e $\boxed{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$ **são mínimos locais.**