Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 3ª prova - 16/11/2011 - Turma B3

1. Defina $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ se (x,y) não é o ponto $(0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   (a) (3 pontos). Determine $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ quando (x,y) não é o ponto $(0,0)$.

   (b) (3 pontos). Determine $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ usando limites.

   (c) (3 pontos). Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$.

Solução.

(a) $f(x,y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} \Rightarrow f_x = \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

Como $f(x,y) = -f(y,x)$, a outra derivada parcial sai facilmente e temos

$$f_x = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{1}$$

(b)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = 0 \tag{2}$$

(c) Também, usando (1) e (2),

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4}}{h} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1$$

2. **(10 pontos).** Se $z = f(x,y)$ onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

Solução. Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

Donde,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot\cos^2\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot\mathrm{sen}^2\,\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e,

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(r^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \cos^2\,\theta + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta - 2r^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\,\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cos^2\,\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\,\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

E somando,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

3. **(8 pontos).** Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ no disco $D:\ x^2 + y^2\ \leq\ 16$.

Solução. $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$

(i) No bordo do disco, $g(x,y) = x^2 + y^2 = 16$. Por Lagrange,

$$\begin{cases} f_x = \lambda\, g_x \\ f_y = \lambda\, g_y \\ g = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = \lambda\, 2x \\ 6y = \lambda\, 2y \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3}$$

Se $y = 0,\ x = \pm 4\ \Rightarrow\ \boxed{(x,y) = (4,0),\ (-4,0)}$

Se $\lambda = 3,\ x = -2,\ y = \pm 2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \boxed{(x,y) = (-2, 2\sqrt{3}),\ (-2, -2\sqrt{3})}$

(ii) No interior do disco, os pontos críticos de f são,

$f_x = 0,\ f_y = 0\ \Rightarrow\ 4x - 4 = 0,\ 6y = 0$ e $\boxed{(x,y) = (1,0)}$ é o único ponto crítico.

(iii) Comparando os valores,

$f(4,0) = 2(16) + 0 - 4(4) - 5 = 11$

$f(-4,0) = 2(16) + 0 - 4(-4) - 5 = 43$

$\boxed{f(-2, \pm 2\sqrt{3}) = 2(4) + 3(12) - 4(-2) - 5 = 47}$ Valor máximo

$\boxed{f(1,0) = 2 + 0 - 4 - 5 = -7}$ Valor mínimo

4. **(7 pontos).** Determine os máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

Solução. $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$. Calculamos as derivadas parciais até a 2a ordem,

$$f_x = ye^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2x) = ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2),\ f_y = xe^{-x^2-y^2}(1-2y^2), \quad (3)$$

$$f_{xx} = ye^{-x^2-y^2}(-2x)(1-2x^2) + ye^{-x^2-y^2}(-4x) = 2xye^{-x^2-y^2}(2x^2-3), \quad (4)$$

$$f_{yy} = 2xye^{-x^2-y^2}(2y^2-3),\ f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)(1-2y^2) \quad (5)$$

Procuramos os pontos críticos para f,

$f_x = ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2) = 0,\ f_y = xe^{-x^2-y^2}(1-2y^2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(x,y) = (0,0)}$ ou $\boxed{(x,y) = (\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}})}$

De acordo com (4) e (5), e lembrando que $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, temos,

$D(0,0) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \boxed{(0,0)}$ **é um ponto de sela.**

Por outro lado, $D(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-2} > 0$. E

$f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -e^{-1} = f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$

$\Rightarrow \boxed{(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})),\ e\ (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})}$ **são máximos locais.**

Também,

$f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1} = f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$

$\Rightarrow \boxed{(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})),\ e\ (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})}$ **são mínimos locais.**