Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 3ª prova - 16/11/2011 - Turma A1

1. Calcule o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

   (a) (4 pontos). $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

   (b) (4 pontos). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$

   Solução.

   (a) Quando $y = x$ e $z = 0$, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$,

   e quando $y = 2x$ e $z = 0$,

   $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$.

   Como $\frac{2}{5}$ é diferente de $\frac{1}{2}$, temos que **o limite não existe**.

   (b) Usando coordenadas polares, $x = r\cos\theta,\ y = r\text{sen}\,\theta \ \Rightarrow\ x^2+y^2 = r^2$ e

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{e^{-r^2}-1}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{e^{-r^2}(-2r)}{2r} = \lim\limits_{r\to 0} (-e^{-r^2}) = \boxed{-1}$

2. **(10 pontos).** A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$ medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

   Solução. Se $t = 3$, então, $x = \sqrt{1+3} = 2$, $y = 2 + \frac{1}{3}3 = 3$. E assim, o inseto passa pelo ponto $(2, 3)$ depois de três segundos. Sabemos que $\frac{\partial T}{\partial x}(2, 3) = 4$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(2, 3) = 3$. E quando $t = 3$, calculando as derivadas, obtemos que, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{4}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$.

   E como, pela Regra da Cadeia, temos,

   $$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

   em particular, para $t = 3$ obtemos que a taxa de variação de T é

   $$\frac{dT}{dt} = 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{2}$$

3. **(8 pontos).** Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ no disco $D:\ x^2+y^2 \ \leq\ 4$.

   Solução. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$

   $\Rightarrow\ f_x = -2x\,e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2) + e^{-x^2-y^2}(2x) = 2x\,e^{-x^2-y^2}(-x^2-2y^2+1)$

e, analogamente, $f_y = 2y\, e^{-x^2-y^2}(-x^2-2y^2+2)$.

(i) Primeiro, para $f(x,y)$ restrita à **fronteira do disco** , $g(x,y)=x^2+y^2=4$. Os pontos (x,y) de máximo ou de mínimo devem satisfazer,

$f_x = 2x\, e^{-x^2-y^2}(-x^2-2y^2+1) = \lambda\, 2x$

$f_y = 2y\, e^{-x^2-y^2}(-x^2-2y^2+2) = \lambda\, 2y$

Dai que se x e y são não nulos,

$\lambda = e^{-x^2-y^2}(-x^2-2y^2+1) = e^{-x^2-y^2}(-x^2-2y^2+2) \Rightarrow 1=2,$ absurdo.

Então, temos duas opções, $\boxed{x=0, \text{ ou } y{=}0}$

Se $x=0,\ y=\pm 2 \Rightarrow \boxed{f(0,\pm 2) = e^{-4}(8)}$

Se $y=0,\ x=\pm 2 \Rightarrow \boxed{f(\pm 2,0) = e^{-4}(4)}$

(ii) Em segundo lugar, os pontos críticos de f no **interior do disco** devem satisfazer $f_x=0,\ f_y=0 \ \Rightarrow\ x=0$ ou $y=0$ (Caso contrário, nos teriamos,$1=2$, um absurdo).

Se $x=0$, então $y=0$ e o valor de f é $\boxed{f(0,0)=0}$ ou

$-2y^2+2=0 \ \Rightarrow\ y=\pm 1$ e o valor é $\boxed{f(0,\pm 1) = \frac{2}{e}}$

Se $y=0$, então $x=0$ e o valor é $\boxed{f(0,0)=0}$ ou

$-x^2+1=0,\ x=\pm 1$ e o valor é $\boxed{f(\pm 1,0) = \frac{1}{e}}$

E como

$0 < \frac{4}{e^4} < \frac{8}{e^4} < \frac{1}{e} < \frac{2}{e}$ (a desigualdade do meio é devido a que $8 = 2^3 < e^3$)

o valor mínimo de f é $\boxed{f(0,0)=0}$ e **o valor máximo de f é** $\boxed{f(0,\pm 1) = \frac{2}{e}}$

4. **(8 pontos).** Determine os máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x,y) = (x^2+y)e^{y/2}$.

Solução. $f(x,y) = (x^2+y)e^{y/2}$. Calculamos as derivadas parciais até a 2a ordem,

$$f_x = 2xe^{y/2},\ f_y = e^{y/2} + \frac{1}{2}(x^2+y)e^{y/2} = \frac{1}{2}(x^2+y+2)e^{y/2} \tag{1}$$

$$f_{xx} = 2e^{y/2},\ f_{xy} = xe^{y/2},\ f_{yy} = \frac{1}{2}e^{y/2} + \frac{1}{4}(x^2+y+2)e^{y/2} = \frac{1}{4}(x^2+y+4)e^{y/2} \tag{2}$$

E temos um único ponto crítico para f pois

$$f_x = 2xe^{y/2} = 0,\ f_y = \frac{1}{2}(x^2+y+2)e^{y/2} = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{(x,y) = (0,-2)}$$

De acordo com (2),

$$f_{xx}(0,-2) = 2e^{-1},\ f_{yy}(0,-2) = \frac{1}{2}e^{-1},\ f_{xy}(0,-2) = 0$$
$$D = D(0,-2) = f_{xx}(0,-2)f_{yy}(0,-2) - (f_{xy}(0,-2))^2 = e^{-2} > 0$$
$$e \qquad f_{xx}(0,-2) = 2e^{-1} > 0$$

e o ponto $\boxed{(0,-2)}$ **é um mínimo local.**