Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 3ª prova - 30/06/2004 - 13h

1. Mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3 + xy^2 + zxy^2}{xyz}$$

Solução. Consideramos o limite ao longo de dois caminhos que se aproximam da origem de $\mathbb{R}^3$.

Primeiro, se $x = y = z$, o limite acima é

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^3 + x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} 1 + 1 + x = 2$$

e, em segundo lugar, se $z = x$, $y = 2x$, o mesmo limite é

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 4x^3 + 4x^4}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 4 + 2x}{2} = \frac{5}{2}$$

e, portanto, **o limite no enunciado da questão não existe.**

2. Encontre os valores dos coeficientes positivos a e b tais que o plano tangente ao elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 3,$$

no ponto $P = (a, b, 2)$ seja paralelo ao plano $x + 6y + z = 9$.

Solução. O vector gradiente $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ no ponto $Q(x, y, z)$ é dado por $\nabla f(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{z}{4})$, onde $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4}$ e sabemos que $\nabla f(x, y, z)$ é normal ao plano tangente ao elipsoide no ponto $Q(x, y, z)$.

$\Rightarrow$ $\nabla f(a, b, 2) = (\frac{2}{a}, \frac{2}{b}, \frac{1}{2})$, é **normal ao plano tangente ao elipsoide no ponto** $P = (a, b, 2)$.

Também sabemos que o vetor $\vec{n} = (1, 6, 1)$ **é normal ao plano** $x + 6y + z = 9$.

Para o plano tangente ao elipsoide no ponto P ser paralelo ao plano $x + 6y + z = 9$, temos que os vetores $\nabla f(a, b, 2)$ e $\vec{n}$ devem ser paralelos, ou seja $\nabla f(a, b, 2) = \lambda\vec{n}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = \lambda \\ \frac{2}{b} = \lambda \cdot 6 \\ \frac{1}{2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{\lambda} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} & \Rightarrow \quad \boxed{a = 4} \\ b = \frac{2}{6\lambda} = \dfrac{2}{\frac{6}{2}} & \Rightarrow \quad \boxed{b = \dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

3. Considere a função $f(x,y) = x^2 + 4xy^2$.

(a) Encontre um vetor unitário $\vec{u}$ tal que $D_{\vec{u}}f(1,1) = 0$.

(b) Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no disco fechado $x^2 - 2x + y^2 \leq 3$.

Solução. (a) $\nabla f(x,y) = (2x+4y^2, 8xy)$, onde $f(x,y) = x^2+4xy^2 \Rightarrow \nabla f(1,1) = (6,8)$ e se (1) $\boxed{\vec{u} = (a,b)}$, queremos

$$D_{\vec{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{u} = (6,8) \cdot (a,b) = 6a + 8b = 0 \quad \Rightarrow \text{ (2) } \boxed{b = -\frac{3}{4}\, a}$$

E como $\vec{u}$ é unitário,

$$1 = |\vec{u}|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \tfrac{9}{16}\, a^2 = \tfrac{25}{16}\, a^2 \Rightarrow \ a^2 = \tfrac{16}{25} \Rightarrow \text{ (3) } \boxed{a = \pm\frac{4}{5}}$$

De $(1), (2)$ e (3), escolhemos $a = \frac{4}{5} \Rightarrow \ b = -\frac{3}{5}$ e $\boxed{\vec{u} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})}$

(b) Procuraremos os valores máximo e mínimo absoluto de f no disco fechado $x^2 - 2x + y^2 \leq 3$.

No interior do disco fechado, $\quad x^2 - 2x + y^2 < 3:$

Pontos críticos: $f_x = 2x + 4y^2, \ f_y = 8xy = 0$

$$\begin{cases} x = -2y^2 \\ y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ x = 0, \ y = 0, \quad \boxed{f(0,0) = 0}$$

Na fronteira do disco fechado, $\quad x^2 - 2x + y^2 = 3:$

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + 4xy^2 \qquad \text{(maximizar)} \\ g(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange $\Rightarrow \nabla f(x,y) = \lambda\, \nabla g(x,y), \ g(x,y) = 0$

$$\begin{cases} 2x + 4y^2 = \lambda(2x - 2) \\ 8xy = \lambda(2y) \\ x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Duas possibilidades:

1ª) $y = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = -1$ ou $x = 3 \ \Rightarrow$ $\boxed{f(-1,0) = 1, \ f(3,0) = 9}$

ou

2ª) $\lambda = 4x = \dfrac{x + 2y^2}{x - 1} \ \Rightarrow \ 4x^2 - 4x = x + 2y^2 \ \Rightarrow \ y^2 = 2x^2 - \frac{5}{2}x.$

Substituindo em $g(x,y) = 0$,

$x^2 - 2x + 2x^2 - \frac{5}{2}x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \ y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ ou $x = 2, \ y = \pm\sqrt{3}$.

Então $\boxed{f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}) = -\frac{13}{4}}$ e $\boxed{f(2, \pm\sqrt{3}) = 28}$

e estes são, respectivamente, **os valores mínimo e máximo de** f (após a comparação entre os cinco valores achados).

4. Encontre os pontos críticos da $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - 2y^4 + y^2$ e classifique-os.

Solução. Pontos críticos de f:

$f_x = 2x - 2y^2 = 0,\ f_y = -4xy - 8y^3 + 2y = 0$, onde $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - 2y^4 + y^2$.

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \text{e} \\ -4y^3 - 8y^3 + 2y = 2y(-6y^2+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \ \Rightarrow \boxed{P_1 = (0,0)}, \text{ ou} \\ y^2 = \frac{1}{6},\ x = \frac{1}{6},\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_2 = (\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})} \quad \text{ou} \quad \boxed{P_3 = (\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}})} \end{cases}$$

Teste da derivada segunda

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = -4y,\ f_{yy} = -4x - 16y^2 + 2, \quad D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$

$$\Rightarrow D = -8x - 48y^2 + 4 = -56x + 4$$

pois $x = y^2$ num ponto crítico.

$D(0,0) = 4 > 0,\ f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{P_1 = (0,0)}$ é mínimo relativo.

$D(\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = D(\frac{1}{6}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = -\frac{32}{6} < 0$

$\Rightarrow \boxed{P_2 = (\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})}$ e $\boxed{P_3 = (\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}})}$ **são pontos de sela.**