Cálculo I: Gabarito 1a prova, Turmas E2, OL. 10 de outubro de 2012, 20h55.

1. (6pts) Resolva: $\frac{x}{x-1} \geq \frac{x}{2-x}$.

   Solução: Observe que a expressão não é definida para $x = 1$ e $x = 2$. Juntando os termos do mesmo lado, obtemos $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{2-x} \geq 0$. Colocando no mesmo denominador e simplificando,

$$\frac{x(3-2x)}{(x-1)(2-x)} \geq 0\,.(\mathbf{1pts})$$

   Montando uma tabela com os sinais de cada termo, (cada linha: (**0.5pts**), e a última (**2pts**))

		0		1		$\frac{3}{2}$		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3 - 2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x(3-2x)}{(x-1)(2-x)}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$

   Logo, $S = (-\infty, 0] \cup (1, \frac{3}{2}] \cup (2, \infty)$ (**1pts**).

   Observações: Lembro que pelas regras de transformação de uma inequação, não pode multiplicar ou dividir ambos lados de uma inequação sem cuidar do sinal! Por exemplo, se quiser dividir ambos lados da inequação original $\frac{x}{x-1} \geq \frac{x}{2-x}$ por x, vai precisar considerar duas possibilidades: se $x > 0$ então a expressão se torna $\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{2-x}$, mas se $x < 0$ então a expressão se torna $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2-x}$. Assim, a solução fica mais complicada, pois precisa considerar todos os casos. Por isso, é melhor começar juntando todos os termos do mesmo lado, usando uma subtração, e montar a tabela.

   Ver também: Exercícios 1.5 e 1.9 na apostila.

2. (4pts) Dê o domínio da função $f(x) = \ln(1 - e^x)$.

   Solução: Como $\ln z$ é bem definido quando $z > 0$, a função será bem definida uma vez que $1-e^x > 0$ (**2pts**), isto é $e^x < 1$ (**1pts**), o que acontece se e somente se $x < 0$. Logo o domínio procurado é $D = \{x : x < 0\} = (-\infty, 0)$ (**1pts**).

   Ver também: Exercício 3.5.

3. (4pts) Calcule o limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

   Solução: Se trata de uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". O objetivo é mostrar que são os termos $\sqrt{x}$ que são mais importantes no denominador e numerador. Para isso, basta colocar $\sqrt{x}$ em evidência:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

   Mas $\lim_{x\to\infty}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{x}}) = 1$ (diferente de zero). Logo, podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \frac{1}{1} = 1\,.(\mathbf{4pts})$$

   Na segunda igualdade, usamos uma das propriedades do limite (se os limites existirem e se o limite do denominador for diferente de zero, então o limite do quociente é o quociente dos limites, ver Proposição 4.1).

   Observe: aqui, não adianta multiplicar e dividir pelo conjugado!

   Ver também: Explicações do Exemplo 4.2 e Exercício 4.2 na apostila.

4. (6pts) Ache as assíntotas (se tiver) da função $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

   Observe que a função é bem definida quando $x \neq 0$ e quando $x^2 - 1 \geq 0$, isto é quando $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. (Logo vemos que não pode ter assíntota vertical em 0: (**−2pts**)!) Como $\sqrt{x^2} = |x|$,

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Quando x tende a $+\infty$, temos $x > 0$, o que implica $|x| = x$. Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1\,(\mathbf{2pts})$$

Por outro lado, quando x tende a $-\infty$, temos $x < 0$, o que implica $|x| = -x$. Logo,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1\,(\mathbf{2pts})$$

Portanto, a função possui duas assíntotas horizontais: $y = -1$ a esquerda (**1pts**), $y = +1$ a direita (**1pts**).

Ver também: Exercícios 4.2 e 4.22.