Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 2ª prova - Turma D - 04/11/2009

Responda 3 questões:

1. Calcule a integral indefinida como uma série de potências e ache o seu raio de convergência:
$$\int \frac{t}{27-t^8}\,dt\,.$$
Solução. Pela série geométrica,
$$\frac{t}{27-t^8} = \frac{t}{27}\,\frac{1}{1-\frac{t^8}{27}} = \frac{t}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{8n}}{27^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{8n+1}}{(27)^{n+1}},$$
que converge se $\frac{t^8}{27}<1 \Rightarrow t^8<27 \Rightarrow |t|<\sqrt[8]{27}t \Rightarrow -<\sqrt[8]{27}<t<\sqrt[8]{27}$.
Integrando termo a termo,
$$\int \frac{t}{27-t^8}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{8n+2}}{(8n+2)(27)^{n+1}},$$
com intervalo de convergência $-<\sqrt[8]{27}<t<\sqrt[8]{27}$.

2. Use derivação e integração para achar uma representação como série de potências para f :

(a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. (b) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Solução. Por logaritmos, $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

Para começar, derivamos $f(x)$,
$$f'(x)=\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)'=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}(-1)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2},$$
ou seja, usando séries geométricas,
$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2\,x^{2n}.$$
Usando que $f(0)=0$, integramos para conseguir $f(x)$ na forma de uma série,
$$f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\,x^{2n+1}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Solução. $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

Derivando,

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, x^{n-1}.$$

Derivando, de novo,

$$\frac{2}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)\, x^{n-2}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{2} x^{n-2}$$

$= \dfrac{1}{2}\,(2.1 - 3.2x + 4.3x^2 - \ldots + (-1)^n n(n-1).x^{n-2} + \ldots)$.

3. Encontre a área da região que está dentro de ambos os círculos $r = 2\operatorname{sen}\theta$ e $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\,\theta$.

Solução. O primeiro círculo, $r = 2\operatorname{sen}\theta$, passa pela origem, tem centro no ponto (0,1), raio 1 e, portanto, está contido somente no 1º e 2º quadrantes. Observamos que este círculo passa pela origem, $r = 0$, para os valores, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. O segundo círculo, $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\,\theta$, também passa pela origem, pois, em coordenadas cartesianas, vemos que tem centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Observe também que este círculo passa pela origem, $r = 0$, para os valores $\theta = -\frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Além da origem $\boxed{r = 0}$, o outro ponto de interseção dos dois círculos é dado por

$$r = 2\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \cos\,\theta \Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta = \cos\,\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4},\ r = \sqrt{2}}.$$

A região que está dentro de ambos os círculos é uma união de duas regiões, R_1 e R_2. A fronteira de R_1 está formada pelo 1º círculo e pela reta $\theta = \frac{\pi}{4}$. A fronteira de R_2 está formada pelo 2º círculo e pela reta $\theta = \frac{\pi}{4}$. Pela fórmula, a área da região é

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\operatorname{sen}\theta + \cos\,\theta)^2\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\,\theta + \cos^2\,\theta)\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\,\frac{1-\operatorname{sen} 2\,\theta}{2}\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1+2\operatorname{sen}\theta\,\cos\,\theta)\,d\theta$$

$$A = \left(\theta + \frac{\cos\,2\,\theta}{2}\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\theta\right)\Bigg]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{0}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi - 1}{2}}.$$

4. Use:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} sen\,\theta + r\cos\,\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\,\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

para provar que $r = a\operatorname{sen}\theta$ e $r = a\,\cos\,\theta$ se interceptam em ângulos retos.

Solução. Para a primeira curva, $r = a\operatorname{sen}\theta$ temos que $\frac{dr}{d\theta} = a\,\cos\,\theta$ e a inclinação é

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{a\,\cos\,\theta\operatorname{sen}\theta + a\operatorname{sen}\theta\,\cos\,\theta}{a\,\cos^2\,\theta - a\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\Rightarrow\; m_1 = \frac{2\,a\operatorname{sen}\theta\,\cos\,\theta}{a\,(\cos^2\,\theta - \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos\,2\theta} = \operatorname{tg} 2\theta.$$

Para a segunda curva, $r = a\,\cos\,\theta$ temos que $\frac{dr}{d\theta} = -a\operatorname{sen}\theta$ e a inclinação é

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{-a\operatorname{sen}^2\theta + a\,\cos^2\,\theta}{-a\operatorname{sen}\theta\cos\,\theta - a\,\cos\,\theta\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow\; m_2 = \frac{a\cos\,2\,\theta}{-a\operatorname{sen}2\,\theta} = -\operatorname{cotg}2\,\theta.$$

Portanto,

$$m_1 m_2 = (\operatorname{tg}2\,\theta)(-\operatorname{cotg}2\,\theta) = -1,$$

e as curvas $r = a\operatorname{sen}\theta$ e $r = a\,\cos\,\theta$ se interceptam em ângulos retos.