Cálculo I: 2a prova, 16/05/2015, 10h00, **Duração: 1h40**. JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS! B

1. (**15pts**) Estude $f(x) = x^4 e^x$, incluindo: sinal, assíntotas (se tiver), variação, posição dos pontos de máx./mín. locais (se tiver), gráfico detalhado.

Temos $D = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ para todo x, f possui um único zero em $x = 0$, e como ela é contínua em todo ponto, f não possui assíntotas verticais (**2pts**). *(Observe que f não é nem par, nem ímpar.) Procurando assíntotas horizontais, calculemos primeiro Quando $x \to +\infty$, o limite $\lim_{x\to+\infty} x^4 e^x$ é da forma $(+\infty)\cdot(+\infty)$, que é $+\infty$, logo f não possui assíntota horizontal quando $x \to +\infty$. Mas quando $x \to +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^4 e^x$ é da forma indeterminada "$(+\infty)\cdot 0$", e pode ser calculado colocando ele na forma de um quociente, $\lim_{x\to-\infty} x^4 e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{e^{-x}}$, virando assim da forma indeterminada "$\frac{+\infty}{+\infty}$". Usando quatro vezes a regra de BH (as funções x^4 e e^{-x} e as suas derivadas sendo deriváveis),*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{24x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{24}{e^{-x}} = 0\,.$$

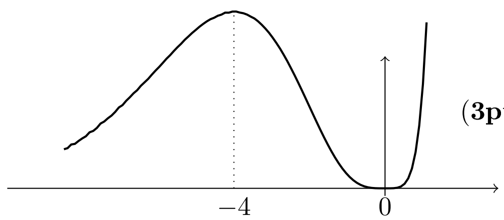
Portanto, a reta $y = 0$ (o eixo x) é assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ (**3pts**). *Calculando a primeira derivada, usamos a regra de Leibnitz para obter*

$$f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = x^3(4+x)e^x\,.(\mathbf{3pts})$$

Como a exponencial é sempre > 0, o sinal de $f'(x)$ obtem-se a partir do sinal de $x^3(4+x)$. Assim, a variação é dada por (**2pts**)

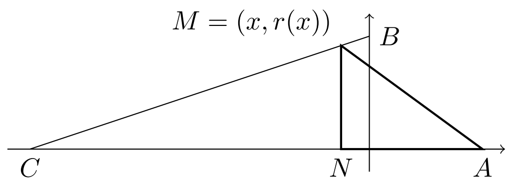
x		-4		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variaç. de f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Assim, f possui um máximo local em $(-4, f(-4)) = (-4, 4^4 e^{-4})$, um mínimo local em $(0, f(0)) = (0,0)$ (**2pts**) *Juntando essas informações obtemos o gráfico:*



(**3pts**)

2. (**13pts**) Sejam $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, e $C = (-3,0)$ pontos no plano cartesiano. Sejam M um ponto no segmento BC, entre B e C, e N a projeção vertical de M no eixo x. Monte e resolva um problema de otimização para achar o ponto M que maximiza a área do triângulo AMN.



Escrevamos $M = (x, r(x))$, onde $r(x) = \frac{1}{3}x + 1$ é a equação da reta que passa por B e C. Como M está entre B e C, precisamos restringir $x \in [-3, 0]$. Para um x fixo, a área do triângulo AMN tem base igual a $1 - x$, e altura igual a $r(x)$. Logo, a sua área é dada por $a(x) = \frac{1}{2}(1-x)(\frac{1}{3}x+1)$. Assim, ***queremos achar o máximo global de** $a(\cdot)$ **no intervalo** $[-3,0]$* (**6pts**)*. Procuremos primeiro os pontos críticos de $a(\cdot)$ em $(-3,0)$. Como $a(x)$ é derivável em todo x (sendo um polinómio de grau 2), esses pontos críticos só podem ser pontos onde a sua derivada se anula. Ora,*

$$a'(x) = \tfrac{1}{2}\big((1-x)(\tfrac{1}{3}x+1)\big)' = (\cdots) = -\tfrac{1}{3}(1+x)\,,$$

que é nula em $x = -1 \in (-3,0)$ (**3pts**). *Temos também $a(-1) = \frac{2}{3}$. Na fronteira do intervalo temos $a(-3) = 0$ e $a(0) = \frac{1}{2}$. Logo, o maior valor é atingido quando $x = -1$, portanto* ***o ponto** M **que maximiza a área do triângulo é** $M = (-1, r(-1)) = (-1, \frac{2}{3})$* (**4pts**).

3. (**7pts**) Justificando cada passo do método que for usar, calcule: $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}$.

O limite é da forma "$\frac{0}{0}$". Mas o numerador e o denominador são ambas funções deriváveis na vizinhança de $x = 0$, e o denominador (assim como a sua derivada) só se anula em $x = 0$ (**2pts**). *Portanto, podemos usar a Regra de BH, e tentar calcular primeiro o limite*

$$\lim_{x\to0} \frac{(\ln(1+x^2)-x^2)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to0} \frac{-1}{2(1+x^2)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4} = -\frac{1}{2}\,.(\mathbf{5pts})$$

Para simplificar, podia ter começado chamando $z = x^2$, e transformar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(1+z) - z}{z^2}\,.$$

Aí, as derivadas ficam um pouco mais simples.

4. (BÔNUS) Existe um ponto do intervalo $[0, 1]$ em que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^5 + x^4$ é igual a 2? (Dica: Teorema de Rolle)

   Observe que f é derivável. Logo, pelo corolário do Teorema de Rolle, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2\,.$$

   Logo, a resposa é SIM. (**5pts**). *(Podia também observar que $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ é contínua, $f'(0) = 0 < 2$, $f'(1) = 9 > 2$, logo pelo Teorema do Valor Intermediário deve existir pelo menos um c entre 0 e 1 em que $f'(c) = 2$.)*