Prova 4

MAT 038 (GAAL) - Turma TA2

7 de julho de 2016

Nome:

Justifique todas as respostas.

1. Sejam $V_1 = (4, 2, -3)$, $V_2 = (2, 1, -2)$ e $V_3 = (-2, -1, 0)$ vetores do $\mathbb{R}^3$.

(a) (1 ponto) Mostre que $\{V_1, V_2\}$ é linearmente independente.

(b) (1 ponto) Mostre que $\{V_1, V_2, V_3\}$ é linearmente dependente.

(c) (1 ponto) Determine W_3 tal que $\{V_1, V_2, W_3\}$ seja uma base do $\mathbb{R}^3$.

2. (3 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine as matrizes P e D tais que

$$A = PDP^T.$$

3. (2 pontos) Calcule os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, calcule os autovalores e determine uma base para os auto-subespaços associados a cada autovalor.

4. Em cada item abaixo, responda se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) (1 ponto) A matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

não é ortogonal para todo valor de θ.

(b) (1 ponto) A matriz

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{bmatrix}$$

é diagonalizável para qualquer valor de a.

PROVA 4 - MAT 038 - TURMA TA2.

1. (a) Vamos resolver a equação $c_1V_1 + c_2V_2 = 0$ para c_1 e c_2:

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 = 0$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A X = 0$$

$$[A|0] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftrightarrow L_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow -2L_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 + L_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O sistema correspondente é

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Logo a única solução do sistema é $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Portanto $\{V_1, V_2\}$ é linearmente independente.

(b) Vamos resolver a equação $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0$ para c_1, c_2 e c_3:

$$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = 0$$

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right|$$

$$-6 \quad -8 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 8$$

$$= -6 - 8 + 6 + 8$$
$$= 0.$$

O sistema $AX = 0$ possui solução diferente de 0 se e somente se $\det(A) = 0$. Logo o sistema mencionado acima possui solução diferente da solução $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Portanto o conjunto $\{V_1, V_2, V_3\}$ é linearmente dependente.

(c) Como $\{V_1, V_2\}$ é linearmente independente, a escolha $V_3 = V_1 \times V_2$ fornece uma base $\{V_1, V_2, V_3\}$ para $\mathbb{R}^3$. Calculamos V_3:

$$V_3 = V_1 \times V_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} E_1 & E_2 & E_3 & E_1 & E_2 \\ 4 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

$$-4E_3 \quad 3E_1 \quad 8E_2 \quad -4E_1 \quad -6E_2 \quad 4E_3$$

$$= (3-4)E_1 + (8-6)E_2 + (-4+4)E_3$$
$$= -E_1 + 2E_2$$
$$= (-1, 2, 0).$$

2. Primeiro calculamos o polinômio característico de A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 6$$

Os autovalores de A são as soluções da equação

$$p(\lambda) = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -3 \quad e \quad \lambda_2 = 2.$$

Vamos calcular os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -3$.

$$A - \lambda_1 I = A - (-3) I$$

$$= A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + (1/2) x_2 = 0$$

x_2 variável livre.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1/2) t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer valor de t.

Portanto $V_1 = (-1/2, 1)$ é um autovalor.
Definimos $U_1 = \frac{1}{\|V_1\|} V_1$ para obter um autovalor unitário:

$$\|V_1\| = \sqrt{(-1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{1/4 + 1} = \sqrt{5/4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo $U_1 = \frac{1}{\|V_1\|} V_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} (-1/2, 1) = \frac{2}{\sqrt{5}} (-1/2, 1)$

$$= (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$$

Vamos calcular os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$:

$$A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{-1} L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + (-2)\, x_2 = 0$$

x_2 variável livre.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer valor de t.

Portanto $V_2 = (2, 1)$ é um autovetor. Definimos $U_2 = \frac{1}{\|V_2\|} V_2$ para obter um autovetor unitário:

$$\|V_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$U_2 = \frac{1}{\|V_2\|} V_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 1) = (2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5}).$$

Portanto as matrizes P e D são dadas por

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ U_1 & U_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda)$$

$p(\lambda) = 0$

$(2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) = 0$

Logo os autovalores de A são

$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

Vamos calcular os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

$$A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_1 I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
x_1 é variável livre.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para qualquer valor de t. Portanto $V_1 = (1,0,0)$ forma uma base para o auto-subespaço de A correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Vamos calcular os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

$$A - \lambda_2 I = A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow (-1)L_1$ $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + (-1)x_2 = 0$$

x_2 e x_3 variáveis livres.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para quaisquer valores de t e s.

Portanto $V_2 = (1,1,0)$ e $V_3 = (0,0,1)$ formam uma base para o auto-subespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

4. (a) Falso. A matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é ortogonal para qualquer valor de θ pois os vetores nas colunas dessa matriz são ortogonais e unitários:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$= -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\|(\cos\theta, \sin\theta)\| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|(-\sin\theta, \cos\theta)\| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Alternativamente, pode verificar que

$$P^{-1} = P^T.$$

(b) Verdadeiro. A matriz

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{bmatrix}$$

é simétrica para qualquer valor de a. Portanto essa matriz é diagonalizável para qualquer valor de a.