Prova 3

MAT 038 (GAAL) - Turma TA2

23 de junho de 2016

Nome:

Justifique todas as respostas.

1. (2 pontos) Determine os valores de a e b para os quais a reta

$$r : (x, y, z) = (a, 2, 0) + t(2, b, a)$$

está contida no plano $\pi : x - 3y + z - 1 = 0$.

2. (2 pontos) Considere os planos $\pi_1 : x - y = 0$ e $\pi_2 : y - z - 1 = 0$ no espaço. A intersecção dos planos π_1 e π_2 é uma reta. Determine a equação paramétrica dessa reta.

3. (2 pontos) Determine a equação do plano π que passa pelos pontos $A = (0, 0, -1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.

4. Considere o vetor $U_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

(a) (1 ponto) Escolha um vetor U_2 de forma que $\mathcal{B} = \{U_1, U_2\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(b) (1 ponto) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base.

(c) (1 ponto) Considere o vetor $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{3}, 3)$. Escreva $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

(d) (1 ponto) Determine $[P]_{\{O,\mathcal{B}\}}$, ou seja, determine as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\{O, \mathcal{B}\}$.

5. Sejam S_1 e S_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ tais que $S_1 \neq S_2$, $S_1 \subset S_2$ (ou seja, S_1 é um subconjunto de S_2), e S_1 e S_2 possuem um número finito de elementos. Suponha que S_2 é linearmente dependente.

(a) (1 ponto) O conjunto S_1 pode ser linearmente dependente? Em caso afirmativo, forneça um exemplo de conjuntos S_1 e S_2 dessa forma.

(b) (1 ponto) O conjunto S_1 pode ser linearmente independente? Em caso afirmativo, forneça um exemplo de conjuntos S_1 e S_2 dessa forma.

PROVA 3 - MAT 038

SOLUÇÃO

1. Primeiro observamos que

$$r : (x,y,z) = (a+2t\,,\,2+bt\,,\,at)$$

Para que a reta r esteja contida no plano $\pi : x - 3y + z - 1 = 0$, todos os pontos de r devem satisfazer a equação de π, ou seja,

$$(a+2t) - 3(2+bt) + (at) - 1 = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Simplificando essa equação obtemos

$$(2+a-3b)t + (a-7) = 0$$

Essa equação é satisfeita para todo t se e somente se

$$2 + a - 3b = 0$$
$$a - 7 = 0 .$$

A segunda equação implica $a = 7$.
A primeira equação implica $b = (2+a)/3 = (2+7)/3 = 3$. Portanto a solução é

$$a = 7 \quad e \quad b = 3 .$$

2. A intersecção $\pi_1 \cap \pi_2$ é determinada pela solução do sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y - z &= 1. \end{aligned}$$

A matriz aumentada desse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escalonando essa matriz obtemos

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema correspondente é

$$\begin{aligned} x + (-1) z &= 1 \\ y + (-1) z &= 1 \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned} x &= 1 + z \\ y &= 1 + z \end{aligned}$$

e z é uma variável livre. Seja

$$z = t.$$

Obtemos a solução

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer valor de t. Essa é a equação paramétrica da reta r.

Solução alternativa:

Resolvemos o sistema por substituição: Obtemos

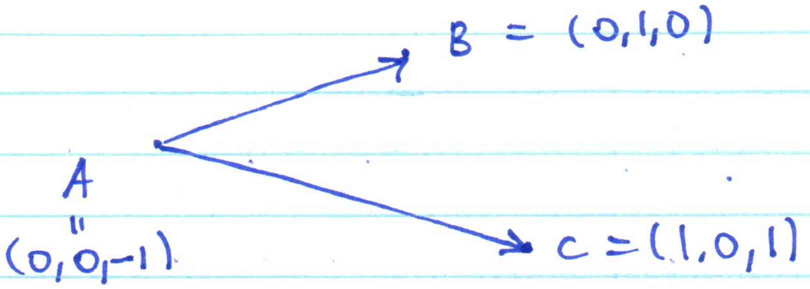
$$x = y$$
$$z = y - 1$$

e y é variável livre. Logo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para qualquer valor de s. Essa é uma equação paramétrica da reta r.

3. Fixamos o ponto A e calculamos $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$:



$$\vec{AB} = (0-0,\ 1-0,\ 0-(-1)) = (0,1,1)$$

$$\vec{AC} = (1-0,\ 0-0,\ 1-(-1)) = (1,0,2).$$

Escolhendo $P_0 = A$ e $N = \vec{AB} \times \vec{AC}$ obtemos um ponto do plano e um vetor normal ao plano, respectivamente. Calculamos

$$N = \vec{AB} \times \vec{AC} = \left| \begin{array}{ccc|cc} E_1 & E_2 & E_3 & E_1 & E_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$-E_3 + 0 + 0 \qquad\qquad 2E_1 + E_2 + 0$$

$$= 2E_1 + E_2 - E_3 = (2,1,-1).$$

Logo a equação do plano é

$$N \cdot (\vec{P_0P}) = 0$$

ou seja

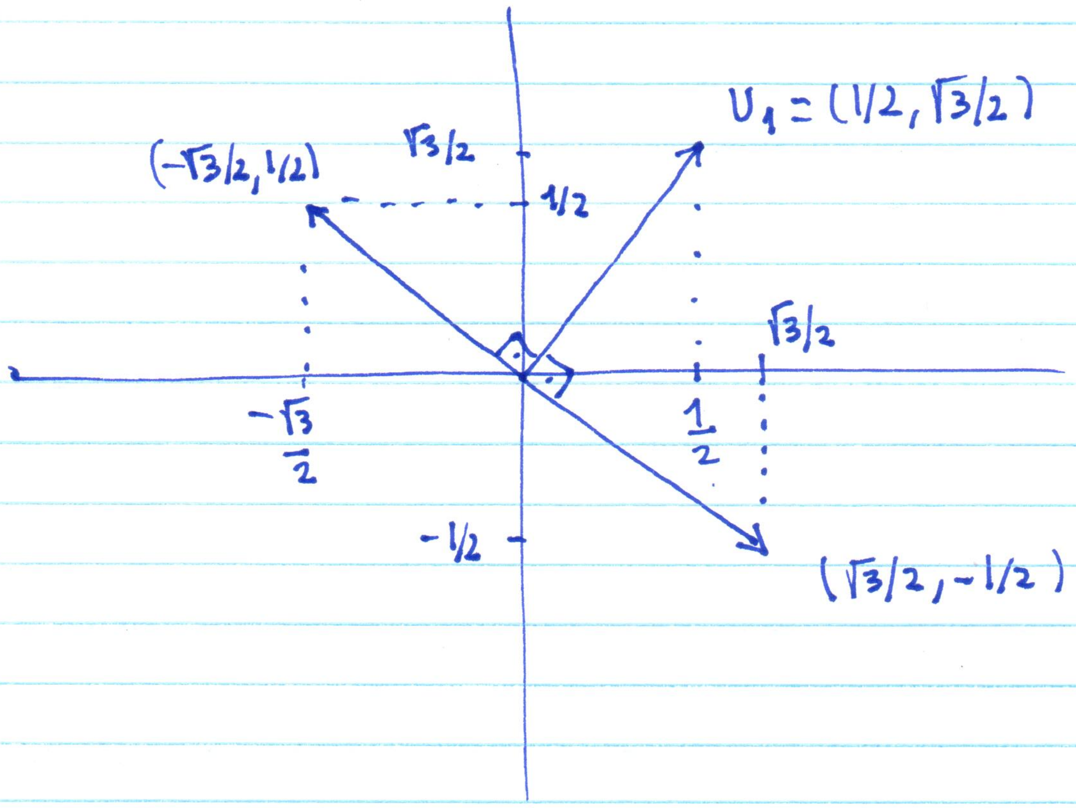
$$(2,1,-1)\cdot(x-0,\ y-0,\ z-(-1))=0$$

$$2x+y-(z+1)=0$$

$$2x+y-z-1=0\ .$$

4. $U_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$

(a) Solução geométrica: Podemos representar U_1 no plano e observar que existem dois candidatos a U_2:



Escolhemos

$$U_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2).$$

Outra opção é

$$U_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$$

Solução algébrica:

Procuramos $U_2 = (x, y)$ tal que

$$U_2 \cdot U_1 = 0$$

$$(x, y) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = 0$$

$$(1/2)x + (\sqrt{3}/2)y = 0.$$

$$\Rightarrow \quad x = -\sqrt{3}\, y.$$

y variável livre

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\, s \\ s \end{bmatrix} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Impondo a condição $\| U_2 \| = 1$ obtemos

$$\| U_2 \| = 1$$

$$\sqrt{(-\sqrt{3}\, s)^2 + s^2} = 1$$

$$\sqrt{3s^2 + s^2} = 1.$$

$$\pm(2s) = 1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2} \text{ ou } s = \frac{-1}{2}.$$

Logo

$$U_1 = (-\sqrt{3}/2, 1/2) \text{ ou } U_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2).$$

(b) Solução 1:

Como U_1 e U_2 são ortogonais, concluímos (por um teorema) que $B = \{U_1, U_2\}$ é linearmente independente.

(Por um teorema) a dimensão do subespaço gerado por B é maior ou igual a 2. Como $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2, segue que B gera $\mathbb{R}^2$.

Portanto B é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^2$, logo B é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Solução 2:

Como U_1 e U_2 são ortogonais, concluímos (por um teorema) que $B = \{U_1, U_2\}$ é linearmente independente.

Resta mostrar que B gera $\mathbb{R}^2$, ou seja, que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma combinação linear de U_1 e U_2. Seja $V = (v_1, v_2)$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que o sistema

$$c_1 U_1 + c_2 U_2 = V$$

tem sempre uma solução c_1, c_2. Reescrevendo esse sistema

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Como

$$\det \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1 \neq 0,$$

a matriz $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ é invertível.

Portanto o sistema

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

tem exatamente uma solução para qualquer $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Isso mostra que $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$.

Portanto, $\mathcal{B}$ é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^2$, logo $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Temos que resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} c_1 - \frac{1}{2} c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = \sqrt{3} c_1 - 6$$

Substituindo na primeira equação obtemos

$$\frac{1}{2} c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} c_1 - 6) = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} c_1 + \frac{3}{2} c_1 - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$2 c_1 = 4\sqrt{3}$$

$$\boxed{c_1 = 2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{3}(2\sqrt{3}) - 6$$
$$= 2 \cdot 3 - 6$$
$$= 0$$

$$\boxed{c_2 = 0}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\, U_1 + 0\, U_2 = 2\sqrt{3}\, U_1$$

(d) Da parte (c) temos

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\, U_1 + 0\, U_2$$

Logo

$$[P]_{\{O,B\}} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Sim. Por exemplo

$$S_1 = \{(1,0,0), (2,0,0)\}$$

e $S_2 = \{(1,0,0), (2,0,0), (0,1,0)\}$

(b) Sim. Por exemplo

$$S_1 = \{(2,0,0), (0,1,0)\}$$

e

$$S_2 = \{(1,0,0), (2,0,0), (0,1,0)\}.$$