# Prova 2

MAT 038 (GAAL) - Turma TA2

19 de maio de 2016

Nome:

**Justifique todas as respostas.**

**1.** Simplifique cada uma das seguintes expressões:

(a) (1 ponto) $(7, 1, 0) \cdot ((2, 0, -1) \times (1, 4, 3))$.

(b) (0.5 ponto) $(V \times W) \times (W \times V)$.

**2.** (1 ponto) Para quais valores de $s$ os vetores $V = (1, 2, s)$ e $W = (-1, 1, 2)$ são ortogonais?

**3.** (1,5 ponto) Determine os valores de $c_1$ e $c_2$ para os quais o vetor $(c_1, 1, c_2)$ é um múltiplo escalar do vetor $(2, -2, 3)$.

**4.** Em coordenadas, sabe-se que $\overrightarrow{AB} = (2, \sqrt{3}, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{3}, 1)$.

(a) (1 ponto) Verifique que $A$, $B$ e $C$ são vértices de um triângulo (ou seja, verifique que $A$, $B$ e $C$ não são colineares).

(b) (1 ponto) Calcule o área $A$ do triângulo $ABC$.

(c) (2 pontos) Calcule a altura $h$ do vértice $A$ em relação ao lado $BC$.

**5.** (2 pontos) Determine condições sobre $x$, $y$ e $z$ sob as quais os pontos $A = (x, y, z)$, $B = (1, 0, -2)$, $C = (-3, 0, 4)$ e $D = (1, 0, 5)$ pertencem a um mesmo plano.

# Prova 2 - GAAL - TA2

1. (a) Primeiro calculamos $(2,0,-1)\times(1,4,3)$.

$$(2,0,-1)\times(1,4,3) = \left|\begin{array}{ccc|cc} E_1 & E_2 & E_3 & E_1 & E_2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right.$$

$$0 \qquad 4E_1 \quad -6E_2 \qquad 0 \quad -E_2 \quad 8E_3$$

$$= 4E_1 - 7E_2 + 8E_3 = (4,-7,8).$$

Logo

$$(7,1,0)\cdot((2,0,-1)\times(1,4,3))$$

$$= (7,1,0)\cdot(4,-7,8)$$

$$= 28 - 7 + 0 = 21.$$

(b) $(V\times W)\times(W\times V)$

$$= (V\times W)\times(-(V\times W))$$

$$= -(V\times W)\times(V\times W) = -0 = 0,$$

onde usamos que $V\times W = -W\times V$ e $U\times U = 0$ para qualquer $U$, em particular para $U = V\times W$.

2. $V \perp W \iff V \cdot W = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= V \cdot W \\ &= (1, 2, s) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= -1 + 2 + 2s \\ &= 1 + 2s \end{aligned}$$

$$\iff s = -\frac{1}{2}$$

3. $$(c_1, 1, c_2) = \lambda\,(2, -2, 3)$$

$$= (2\lambda, -2\lambda, 3\lambda)$$

$$\iff \begin{cases} c_1 = 2\lambda \\ 1 = -2\lambda \\ c_2 = 3\lambda \end{cases}$$

A segunda equação implica $\lambda = -\frac{1}{2}$.

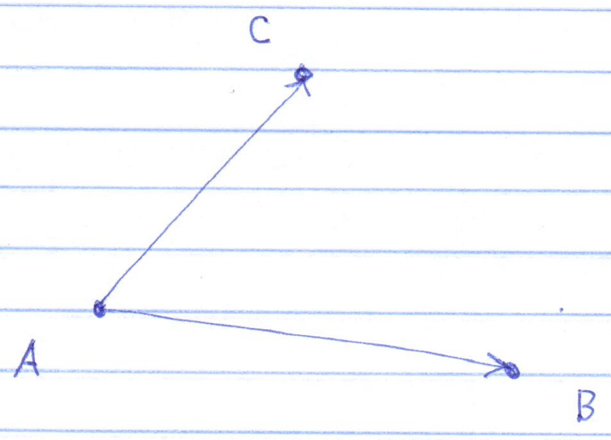
Logo

$$c_1 = 2 \cdot \lambda = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

e

$$c_2 = 3\lambda = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

4.




(a) Se $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq 0$, então $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ não são paralelos, e consequentemente os pontos A, B e C não são colineares. Calculamos então $\vec{AB} \times \vec{AC}$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left| \begin{array}{ccc|cc} E_1 & E_2 & E_3 & E_1 & E_2 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 2 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -1 & \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{3}E_3 \quad -\sqrt{3}E_1 \quad -2E_2 \quad \sqrt{3}E_1 \quad -E_2 \quad 2\sqrt{3}E_3$$

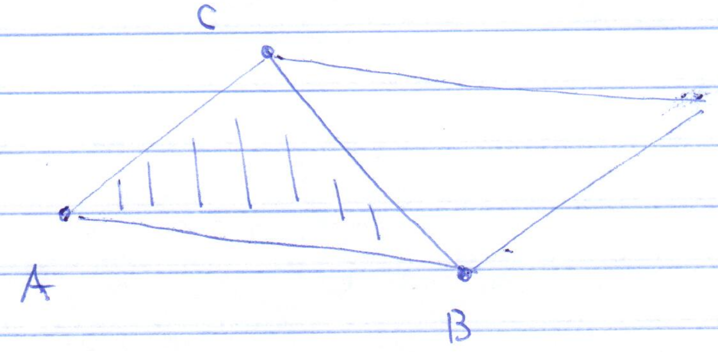
$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-\sqrt{3}+\sqrt{3})E_1 + (-2-1)E_2 + (\sqrt{3}+2\sqrt{3})E_3$$

$$= -3E_2 + 3\sqrt{3}E_3$$

$$= (0, -3, 3\sqrt{3}) \neq (0, 0, 0).$$

Portanto A, B e C não são colineares. Logo A, B e C são vértices de um triângulo.

(b) A área do triângulo ABC é igual a um meio vezes a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$:




Logo

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| .$$

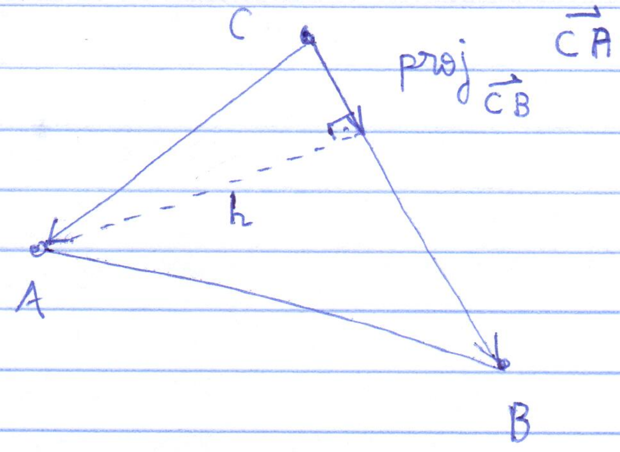
Como

$$\begin{aligned} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| &= \|(0, -3, 3\sqrt{3})\| \\ &= \sqrt{0 + 9 + 9 \cdot 3} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Portanto

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

(c)




Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$\|\vec{CA}\|^2 = \|\text{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA}\|^2 + h^2 ,$$

ou seja

$$h = \sqrt{\|\vec{CA}\|^2 - \|\text{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA}\|^2} .$$

Logo nos resta calcular $\|\vec{CA}\|^2$ e $\|\text{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA}\|^2$.

Temos que

$$\vec{CA} = -\vec{AC} = -(-1, \sqrt{3}, 1) = (1, -\sqrt{3}, -1) .$$

Por outro lado

$$\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{BC} \quad e \quad \vec{BC} = -\vec{CB} .$$

Logo

$$\vec{CB} = -\vec{BC} = -\vec{CA} - \vec{AB} = (-1, \sqrt{3}, 1) - (2, \sqrt{3}, 1)$$
$$= (-3, 0, 0) .$$

Consequentemente

$$\|\vec{CA}\| = \|(1, -\sqrt{3}, -1)\|$$
$$= \sqrt{1+3+1}$$
$$= \sqrt{5}$$

$$\|\vec{CB}\| = \|(-3, 0, 0)\|$$
$$= \sqrt{9+0+0}$$
$$= 3.$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (1, -\sqrt{3}, -1) \cdot (-3, 0, 0)$$
$$= -3 + 0 + 0$$
$$= -3.$$

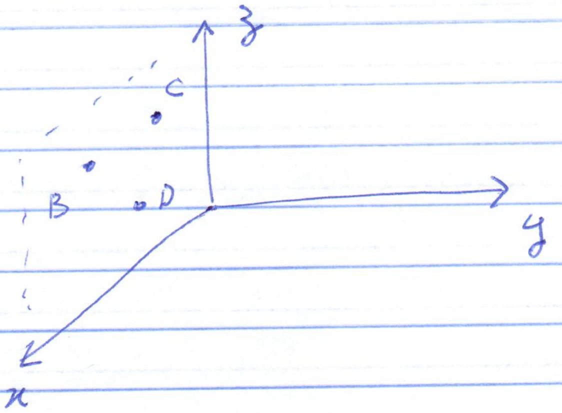
$$\mathrm{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CB}\|^2} \vec{CB}$$
$$= \frac{-3}{9}(-3, 0, 0)$$
$$= -\frac{1}{3}(-3, 0, 0)$$
$$= (1, 0, 0)$$

$$\|\mathrm{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA}\| = \|(1, 0, 0)\| = 1.$$

Portanto

$$h = \sqrt{\|\vec{CA}\|^2 - \|\mathrm{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA}\|^2}$$
$$= \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$$

5. Observamos que a segunda coordenada de B, C e D é igual a zero. Logo B, C e D pertencem ao plano $xz$




Portanto A, B, C e D pertencem ao mesmo plano, isto é, o plano $xz$, se e somente $y = 0$ e $x$ e $z$ são quaisquer.

Solução alternativa:

Os pontos A, B, C e D pertencem ao mesmo plano se e somente se os vetores

$$\vec{DA}, \vec{DB} \text{ e } \vec{DC}$$

são paralelos a um mesmo plano. Isso ocorre se e somente se

$$(\vec{DA} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DC} = 0.$$

Calculamos

$\vec{DA} = (x,y,z) - (1,0,5) = (x-1, y, z-5)$

$\vec{DB} = (1,0,-2) - (1,0,5) = (0,0,-7)$

$\vec{DC} = (-3,0,4) - (1,0,5) = (-4,0,-1)$

$$(\vec{DA} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DC} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 0 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= y \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$$ (onde expandimos pela segunda coluna)

$= y \cdot (-1)(-28) =$

$= 28y$

Portanto

$$(\vec{DA} \times \vec{DB}) \cdot \vec{DC} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$28y = 0$$

$\Leftrightarrow$

$y = 0$ e $x$ e $y$ são quaisquer

(não há condição sobre $x$ e $y$).