Prova 1

MAT 038 (GAAL) - Turma TA2

14 de abril de 2016

Nome:

Justifique todas as respostas

1. (2,5 pontos) Obtenha todas as soluções do sistema de equações

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 12x_2 + 8x_3 &= 7. \end{aligned}$$

2. (2,5 pontos) Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= b. \end{aligned}$$

Determine os valores de a e b para os quais o sistema possui nenhuma solução, apenas uma solução, um número infinito de soluções, respectivamente.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{-1} (1 ponto) e B^{-1} (1,5 ponto).

4. (2 pontos) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. (0.5 ponto) Sejam A e B matrizes quadradas tais que $\det(A) = 3$ e $\det(B) = -2$. Calcule $\det(A^T B)$.

Prova 1 - TA2

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 12 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -2 \\ 0 & 25/2 & 15/2 & 10 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow -\frac{2}{5} L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 25/2 & 15/2 & 10 \end{bmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{25}{2} L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\frac{15}{2} - \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{2} - \frac{15}{2} = 0 \qquad 10 - \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = 10 - 10 = 0$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/5 & 13/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-5-3}{10} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5} \qquad 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{30-4}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$

Logo

$$x_2 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} x_3$$

$$x_1 = \frac{13}{5} + \frac{4}{5} x_3$$

Portanto

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/5 + (4/5)\,s \\ 4/5 - (3/5)\,s \\ s \end{bmatrix} \quad \text{para qualquer valor de } s}$$

2. $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}}_{B}$$

Se A é invertível, ou seja, $\det(A) \neq 0$, o sistema $AX = B$ possui apenas uma solução para qualquer matriz coluna B, ou seja, para qualquer valor de b.

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$-2 \qquad 1 \qquad -a \qquad 2a \qquad -1 \qquad 1$$

$$\det(A) = 2a - 1 + 1 - 2 + 1 - a = a - 1.$$

Logo, se $a \neq 1$, então $\det(A) \neq 0$.

Portanto, para $a \neq 1$ e b qualquer o sistema possui apenas uma solução.

Nos resta analisar o caso $a = 1$. Suponha que $a = 1$. Então a matriz aumentada do sistema é

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

Observamos que se $b-1 \neq 0$, então o sistema não possui solução.

Portanto, para $a=1$ e $b \neq 1$, o sistema não possui solução.

Nos resta analisar o caso $a=1$ e $b=1$. Suponha que $b=1$. Então a matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema possui um número infinito de soluções.

Recapitulando temos

- $a \neq 1$, b qualquer $\Rightarrow$ apenas uma solução.
- $a = 1$, $b = 1$ $\Rightarrow$ número infinito de soluções
- $a = 1$, $b \neq 1$ $\Rightarrow$ nenhuma solução.

3. Para calcular A^{-1} podemos usar a fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\mathrm{Cof}(A)]^T = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 0 - 1 \cdot (-3)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Alternativamente

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{2}{3} L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}}$$

$$[B|I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= [I \mid B^{-1}]$$

Portanto

$$\boxed{B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Expandindo pela primeira coluna obtemos

$$\det(A) = 0 + 0 + 0 + 2 \cdot [\mathrm{Cof}(A)]_{4,1}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

Agora

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 (0 \cdot 3 - 2(-3))$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 6$$

$$= 6$$

Logo

$$\det(A) = 2 \cdot (-1)^5 \cdot 6 = 2 \cdot (-1) \cdot 6 = \boxed{-12.}$$

5. $\det(A^T B) = \det(A^T)\det(B)$

$$= \det(A)\det(B)$$

$$= 3 \cdot (-2)$$

$$\boxed{= -6.}$$