GAAL - Prova Suplementar - 25/junho/2013
SOLUÇÕES

Questão 1: Considere os pontos $A = (-1, 3, -2)$, $B = (1, 1, 2)$ e $C = (2, 1, -1)$.

(a) Determine a equação do plano que contém os pontos A, B e C.

(b) Mostre que o triângulo ABC é um triângulo retângulo. Em qual dos seus vértices está o ângulo reto?

(c) Calcule a área do triângulo ABC.

SOLUÇÃO:

(a) Os vetores $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 4)$ e $\overrightarrow{AC} = (3, -2, 1)$ são paralelos ao plano procurado. Logo um vetor normal deste plano pode ser o produto vetorial

$$N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = (6, 10, 2).$$

Como as coordenadas do vetor normal são os coeficientes da equação, podemos concluir que o plano tem equação da forma $6x + 10y + 2z = d$ para algum número real d. Para calcular d podemos substituir nesta equação as coordenadas de qualquer ponto do plano. Substituindo as coordenadas de A, B ou C obtemos $d = 20$. Portanto o plano procurado tem equação geral $6x + 10y + 2z = 20$. Simplificando, obtemos

$$\boxed{3x + 5y + z = 10}$$

(b) Os vetores $\overrightarrow{CA} = (-3, 2, -1)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1, 0, 3)$ são ortogonais pois

$$\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 3 + 0 - 3 = 0.$$

Isto significa que o triângulo ABC é retângulo no vértice C.

(c) Sabemos que a área do paralelogramo cujos lados são os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é igual ao módulo do produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 10, 2)$. Traçando uma diagonal, dividindo esta área por 2, obtemos a área do triângulo ABC.

$$\text{área}(ABC) = \frac{\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \|}{2} = \frac{\| (6, 10, 2) \|}{2} = \frac{\sqrt{36 + 100 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{140}}{2} .$$

Questão 2: Considere o plano π e a reta r de equações

$$\pi : \ 2x - y + z = 2$$
$$r : \ (x, y, z) = (-1, 8, -3) + t(1, -1, 2).$$

(a) Determine as coordenadas do ponto $P = r \cap \pi$.

(b) Determine a equação do plano α que contém r é perpendicular ao plano π.

SOLUÇÃO:

(a) Como o ponto P pertence a reta r, as coordenadas de P satisfazem a equação paramétrica de r. Assim podemos escrever

$$P \ = \ (-1 + t, \ 8 - t, \ -3 + 2t).$$

Como este ponto também está no plano π, as coordenadas de P devem satisfazer a equação de π. Daí substituindo $x = -1 + t$, $y = 8 - t$ e $z = -3 + 2t$ em $2x - y + z = 2$ obtemos

$$2(-1 + t) - (8 - t) + (-3 + 2t) = 2.$$

Resolvendo esta equação obtemos $t = 3$. Substituindo este valor de t na equação paramétrica de r, obtemos $P = (2, 5, 3)$.

(b) Como a reta r está contida no plano procurado α, vemos que o vetor diretor $V_r = (1, -1, 2)$ é paralelo a α. Por outro lado, como os planos α e π são ortogonais, o vetor normal $N_\pi = (2, -1, 1)$ é paralelo ao plano procurado α. Então, como os vetores V_r e N_π são paralelos ao plano α, um vetor normal deste plano pode ser o produto vetorial $N_\alpha = V_r \times N_\pi$.

$$N_\alpha = V_r \times N_\pi = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (1, 3, 1).$$

Daí segue que o plano α tem equação do tipo $x + 3y + z = d$. Como este plano deve conter a reta r, esta equação deve ser satisfeita por todos os pontos de r. Daí substituindo $x = -1 + t$, $y = 8 - t$ e $z = -3 + 2t$ em $x + 3y + z = d$ obtemos

$$(-1 + t) + 3(8 - t) + (-3 + 2t) = d.$$

Desta equação obtemos $d = 20$. Portanto o plano α tem equação

$$\boxed{x + 3y + z = 20}$$

Questão 3: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre o polinômio característico de A;

(b) Encontre os auto-valores de A;

(c) Encontre os auto-espaços de A;

(d) Para cada auto-valor de A, determine uma auto-vetor unitário associado;

(e) Determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que

$$P^t = P^{-1} \quad \text{e} \quad P^{-1}AP = D;$$

(f) Utilize os itens anteriores para identificar e fazer um esboço no plano xy, da cônica

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y \;=\; 0$$

SOLUÇÃO:

(a) O polinômio característico de A:

$$p(\lambda) \;=\; \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-\lambda \end{bmatrix} \;=\; \lambda^2 - 4\lambda.$$

(b) Autovalores são raízes de $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, ou seja, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$.

(c) Autovetores para $\lambda = 0$.

$$\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este sistema linear tem como solução a reta $y = -\sqrt{3}\,x$.

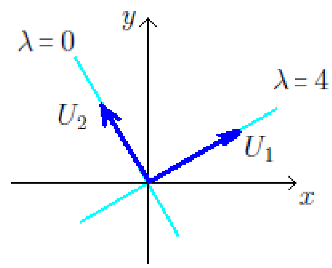
Autovetores para $\lambda = 4$.

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso obtemos a reta de equação $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

(d) Vetores unitários nas direções destas retas são

$$U_1 \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad U_2 \;=\; \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$



(e) Colocando estes vetores nas colunas de P, podemos formar as seguintes matrizes P e D que diagonalizam A.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Observe que $P = R_{30^o}$ é a matriz matriz de rotação de 30^o.

(f) Efetuando a mudança de coordenadas $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ tal que $X' = P^t X$ sabemos que a equação quadrática dada passa a ter a forma

$$X'^t D X' + KPX' = 0$$

no sistema de coordenadas $x'y'$. Substituindo as matrizes calculadas, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0$$

Efetuando as multiplicações obtemos $4x'^2 - 4y' = 0$. Simplificando obtemos a parábola de equação

$$\boxed{y' = x'^2}$$

Como $P = R_{30^o}$, a cônica dada no enunciado é obtida da parábola $y = x^2$ por uma rotação de 30^o. Os gráficos destas duas parábolas estão representados a seguir.