GAAL - Exame Especial - 12/julho/2013
SOLUÇÕES

Questão 1: Considere os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (3, 1, 2)$ e $D = (2, 2, 1)$.

(a) Chame de α o plano que passa pelos pontos A, B e C e de β o plano que passa pelos pontos A, B e D. Ache equações gerais de α e β.

(b) Se θ é o ângulo entre os planos α e β, calcule $\cos(\theta)$.

(c) Determine a equação paramétrica da reta r dada pela interseção $\alpha \cap \beta$.

(d) Calcule a distância do ponto C até a reta r.

SOLUÇÃO:

(a) Vamos utilizar o produto misto para calcular as equações de α e β. Para isso observe que um ponto $P = (x, y, z)$ está em α se os vetores $\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2, z-3)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, -1, -1)$ são coplanares. Isto ocorre se o produto misto $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \rangle$ for igual a zero. Mas para calcular este produto misto basta calcular o determinante da matriz que tem como linhas estes vetores. Daí vemos que um ponto P pertence a α se

$$\begin{bmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \ .$$

Calculando o determinante obtemos $-3x - 3y - 3z + 18 = 0$. Simplificando obtemos a seguinte equação para o plano α.

$$\boxed{x + y + z = 6}$$

De modo análogo, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plnao β se os vetores $\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2, z-3)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AD} = (1, 0, -2)$ são coplanares. Isto significa que o produto misto destes vetores deve ser igual a zero, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 0 \ .$$

Calculando o determinante obtemos $-2x - z + 5 = 0$. Ou seja, obtemos a seguinte equação para o plano β.

$$\boxed{2x + z = 5}$$

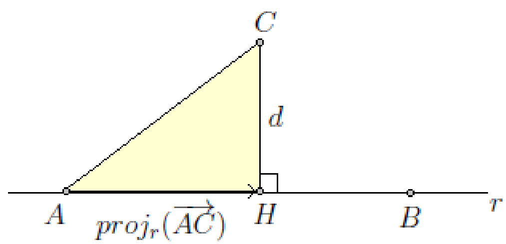
(b) Sabemos que o cosseno do ângulo entre os planos α e β é igual ao valor absoluto do cosseno do ângulo entre os vetores normais $N_\alpha = (1,1,1)$ e $N_\beta = (2,0,1)$. Pela definição do produto escalar, se θ é o ângulo entre os planos α e β, então

$$\cos(\theta) \;=\; \frac{|\langle N_\alpha, N_\beta \rangle|}{\| N_\alpha \| \| N_\beta \|} \;=\; \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \;=\; \frac{\sqrt{15}}{5} \,.$$

(c) Como os pontos A e B pertencem a ambos os planos α e β, vemos que $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$ é a reta que liga estes pontos. Para escrever esta reta, podemos considerá-la como a reta que passa por $A = (1,2,3)$ e tem como vetor diretor $\overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$. Logo uma equação paramétrica para a reta r pode ser

$$\boxed{(x,y,z) \;=\; (1,2,3) + t(1,1,-2)}$$

(d) Para calcular a distância do ponto C até a reta r, vamos considerar a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{AC} = (2,-1,-1)$ sobre o vetor diretor $V_r = \overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$ da reta r.



Esta projeção ortogonal é dada por

$$proj_r(\overrightarrow{AC}) \;=\; \frac{\langle \overrightarrow{AC}, V_r \rangle}{\langle V_r, V_r \rangle} V_r \;=\; \frac{2-1+2}{1+1+4}(1,1,-2) \;=\; \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \,.$$

Daí podemos calcular os lados AC e AH do triângulo retângulo da figura acima.

$$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad \| proj_r(\overrightarrow{AC}) \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACH obtemos

$$d \;=\; \sqrt{6 - \frac{6}{4}} \;=\; \sqrt{\frac{24-6}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} \;=\; \frac{\sqrt{18}}{2} \;=\; \frac{3\sqrt{2}}{2} \,.$$

Questão 2: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Esta matriz é diagonalizável? Justifique sua resposta.

(b) Calcule o polinômio característico, os autovalores e os respectivos autoespaços de A.

(c) Obtenha uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$.

SOLUÇÃO:

(a) Como A é uma matriz simétrica, A é diagonalizável.

(b) Como A é simétrica ela é diagonalizável por uma matriz ortogonal P. Esta matriz possui como colunas autovetores unitários e ortogonais. Para o cálculo de P vamos determinar uma base ortonormal para cada autoespaço de A.

- Polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2.$$

- Autovalores são as raízes de $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Resolvendo obtemos as raízes $\lambda = 1$, $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$.

- Autovetores para $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Todas as equações deste sistema são equivalentes a $x + y - z = 0$, que é a equação de um plano pela origem. Isolando z por exemplo, obtemos $z = x + y$ e assim o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ é o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Separando as variáveis também podemos escrever

$$W_1 = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Isto significa que W_1 é um subespaço de dimensão dois com base formada pelos seguintes vetores V_1 e V_2.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, a partir desta base $\{V_1, V_2\}$, vamos obter uma base ortogonal $\{V_1', V_2'\}$ do plano W_1. Só para economizar espaço, escrevendo os vetores em linha, defina:

$$\begin{aligned} V_1' &= V_1 = (1,0,1) \\ V_2' &= V_2 - \operatorname{proj}_{V_1}(V_2) = (0,1,1) - \frac{0+0+1}{1+0+1}(1,0,1) \;=\; \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Para obter vetores unitários, basta dividir estes vetores pelas suas respectivas normas. Deste modo uma base ortonormal $\{U_1, U_2\}$ do subespaço W_1 é formada pelos vetores

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{V_1'}{\| V_1' \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ U_2 &= \frac{V_2'}{\| V_2' \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

- Autovetores para $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema linear obtemos $x = y = -z$. Assim o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -2$ é o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$W_{-2} \;=\; \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall\, t \in \mathbb{R} \right\} \;=\; \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daí vemos que W_{-2} é um subespaço de dimensão um que tem uma base formada pelo vetor

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dividindo pela sua norma, obtemos o seguinte vetor unitário que forma uma base ortonormal para a reta W_{-2}.

$$U_3 = \frac{V_3}{\| V_3 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(c) Vimos que os autovalores de A são $\lambda = 1$, $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Colocando estes números na diagonal de D obtemos

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos uma base ortonormal $\{U_1, U_2\}$ para o autoespaço associado a $\lambda = 1$ e calculamos a base ortonormal $\{U_3\}$ para o autoespaço associado a $\lambda = -2$. Colocando estes vetores U_1, U_2 e U_3 como colunas, obtemos a seguinte matriz ortogonal P que diagonaliza A.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Estas matrizes P e D diagonalizam A no sentido que $D = P^{-1}AP$.

Questão 3: Seja $v = (a, b, c)$ um vetor de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as seguintes três condições:

(i) $v \times (1, -1, 0) = (1, 1, -2)$,

(ii) $\| v \| = \sqrt{75}$ e

(iii) o ângulo entre v e o vetor $(1, 0, -6)$ é maior que 90^o.

Determine as coordenadas a, b e c deste vetor v.

SOLUÇÃO: Vamos utilizar sequencialmente cada uma das condições dadas sobre o vetor v.

(i) Se $v = (a, b, c)$, calculando o produto vetorial $v \times (1, -1, 0)$ obtemos

$$v \times (1, -1, 0) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (c, c, -a - b).$$

Como este produto vetorial é igual ao vetor $(1, 1, -2)$ obtemos a igualdade

$$(c, c, -a - b) = (1, 1, -2).$$

Isto significa que $c = 1$ e que $a + b = 2$. Substituindo então os valores $b = 2 - a$ e $c = 1$ na expressão de $v = (a, b, c)$, vemos que v tem a forma

$$v = (a, 2 - a, 1).$$

(ii) Como $\| v \|^2 = 75$ segue que $a^2 + (2 - a)^2 + 1 = 75$. Simplificando obtemos a equação $a^2 - 2a - 35 = 0$ cujas soluções são $a = 7$ e $a = -5$. Então, por enquanto, obtemos dois possíveis vetores v, a saber:

- Para $a = 7$ obtemos $v = (7, -5, 1)$.
- Para $a = -5$ obtemos $v = (-5, 7, 1)$.

(iii) Como o ângulo entre os vetores v e $u = (1, 0, -6)$ é obtuso, o cosseno do ângulo entre estes vetores é **negativo**. Mas este cosseno tem o mesmo sinal do produto escalar $\langle v, u \rangle$. Então vamos calcular este produto escalar para determinar qual dos dois possíveis vetores v satisfaz esta terceira condição.

- Para $a = 7$ obtemos $v = (7, -5, 1)$. Neste caso, $\langle v, u \rangle = 7 + 0 - 6 = 1$. Não serve pois é positivo.
- Para $a = -5$ obtemos $v = (-5, 7, 1)$. Neste caso, $\langle v, u \rangle = -5 + 0 - 6 = -11$. Serve pois é negativo.

Portanto o único vetor v que satisfaz as três condições dadas é o vetor $\boxed{v = (-5, 7, 1)}$.