GAAL - Terceira Prova - 15/junho/2013
SOLUÇÕES

Questão 1: Analise se a afirmação abaixo é falsa ou verdadeira:

$$\textit{A matriz } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \textit{ é diagonalizável.}$$

SOLUÇÃO: Sabemos que uma matriz $n \times n$ é diagonalizável se ela possuir n autovetores LI. Além disso, sabemos que autovetores associados a autovalores diferentes são LI. Deste modo, se uma matriz $n \times n$ possuir n autovalores diferentes, então ela é diagonalizável. No caso da questão da prova, o polinômio característico da matriz dada é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda.$$

Os autovalores são as raízes da equação $\lambda^2 - \lambda = 0$, ou seja, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ são os autovalores de A. Como A é uma matriz 2×2 e como A possui dois autovalores diferentes, podemos concluir que A é diagonalizável. Portanto a afirmação é verdadeira.

Apesar da questão já estar respondida e justificada, vamos continuar apresentando uma solução alternativa, calculando os autovetores para cada autovalor de A e as matizes P e D que diagonalizam A.

- Para $\lambda = 0$ os autovetores associados são soluções do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Deste sistema linear obtemos a reta de equação $y = 0$. Portanto, por exemplo, $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$.

- Para $\lambda = 1$ os autovetores associados são soluções do sistema linear

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Aqui obtemos a reta de equação $y = x$. Neste caso, por exemplo, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Como V_1 e V_2 são autovetores LI e como A é 2×2, podemos concluír que A é diagonalizável. Mais ainda, colocando os autovalores na diagonal de D e colocando os autovetores V_1 e V_2 como colunas de P, obtemos as seguintes matrizes D e P que diagonalizam A no sentido que $P^{-1}AP = D$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 2: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Determine o conjunto $S = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}$;

(b) Encontre uma base e determine a dimensão de S;

(c) Encontre uma base ortogonal para S.

SOLUÇÃO:

(a) A equação $Av = v$ indica o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ou, em termos de equações,

$$\begin{cases} 3x + y - z = x \\ 4x + 3y - 2z = y \\ -4x - 2y + 3z = z \end{cases}$$

Em cada equação, passando o termo do lado direito para o lado esquerdo, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Todas as equações deste sistema linear são múltiplas uma da outra. Então considerando apenas a primeira equação, vemos que o conjunto solução S é o plano em $\mathbb{R}^3$ de equação

$$2x + y - z = 0 .$$

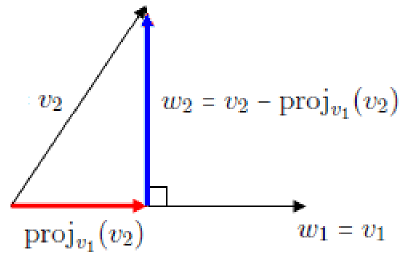
(b) Isolando y na equação deste plano obtemos $y = -2x + z$. Logo todo vetor v do plano S é da forma $v = (x, -2x + z, z)$ onde x e z são variáveis livres. Separando estas variáveis na expressão de v obtemos

$$v = x(1, -2, 0) + z(0, 1, 1).$$

Esta expressão mostra que se $v_1 = (1, -2, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$ então todo vetor de S é uma combinação linear de v_1 e v_2. Como estes vetores não são múltiplos um do outro, concluímos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de S. Daí $\dim(S) = 2$.

(c) No item (a) vimos que se $v_1 = (1, -2, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$ então $\{v_1, v_2\}$ é uma base para o plano S. Como $\langle v_1, v_2 \rangle = -2 \neq 0$, esta base não é ortogonal. Vamos mudar desta base para uma base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ usando projeção ortogonal. Observando a figura a seguir, estes vetores podem ser definidos por:

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - \text{proj}_{v_1}(v_2)$.



Efetuando os cálculos obtemos

- $w_1 = v_1 = (1, -2, 0)$
- $w_2 = v_2 - \text{proj}_{v_1}(v_2) = (0, 1, 1) - \dfrac{0 - 2 + 0}{1 + 4 + 0}(1, -2, 0) \;=\; \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, 1\right).$

Observe que estes vetores $w_1 = (1, -2, 0)$ e $w_2 = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, 1\right)$ satisfazem a equação $2x + y - z = 0$ e que, como tinha que ser, $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. Portanto, $\{w_1, w_2\}$ é uma base ortogonal de S.

Para evitar o uso de frações, considerando o vetor $5w_2 = (2, 1, 5)$, vemos que $\{w_1, 5w_2\}$ também é uma base ortogonal de S.

Questão 3: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre o polinômio característico de A;

(b) Encontre os auto-valores de A;

(c) Encontre os auto-espaços de A;

(d) Para cada auto-valor de A, determine uma auto-vetor unitário associado;

(e) Determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que

$$P^t = P^{-1} \quad \text{e} \quad P^{-1}AP = D;$$

(f) Utilize os itens anteriores para identificar e fazer um esboço no plano xy, da cônica

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 3\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y = 15\ .$$

SOLUÇÃO:

(a) Polinômio característico de A:

$$p(\lambda) \;=\; \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \;=\; \lambda^2 - 5\lambda.$$

(b) Auto-valores são raízes de $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, ou seja, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 5$.

(c) Auto-vetores para $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Este sistema linear tem como solução a reta $y = -2x$.

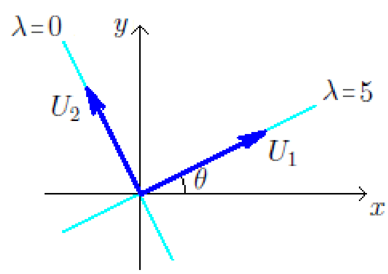
Auto-vetores para $\lambda = 5$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso obtemos a reta de equação $y = \dfrac{1}{2}x$.

(d) Vetores unitários nas direções destas retas são

$$U_1 \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad\qquad U_2 \;=\; \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$



(e) Colocando os auto-valores 5 e 0 na diagonal de D e colocando os correspondentes auto-vetores unitários U_1 e U_2 como colunas de P, obtemos as seguintes matrizes D e P que diagonalizam A no sentido que $P^{-1}AP = D$.

$$D \;=\; \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad P \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Observe que P é uma matriz de rotação R_θ, em que θ é tal que $\cos(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

(f) Efetuando a mudança de coordenadas $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ tal que $X' = P^t X$ sabemos que a equação quadrática dada passa a ter a forma

$$X'^t D X' + KPX' = 15$$

no sistema de coordenadas $x'y'$. Substituindo as matrizes calculadas, obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 15$$

Efetuando as multiplicações obtemos $5x'^2 - 10x' - 5y' = 15$. Simplificado obtemos a parábola de equação

$$\boxed{y' = x'^2 - 2x' - 3}$$

Esta parábola é côncava para cima, cruza o eixo y' em $y' = -3$ e possui raízes $x' = -1$ e $x' = 3$. Efetuando uma rotação no gráfico desta parábola de modo que os eixos x' e y' coincidam com as retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -2x$, respectivamente, obtemos o gráfico da cônica dada no enunciado desta questão.