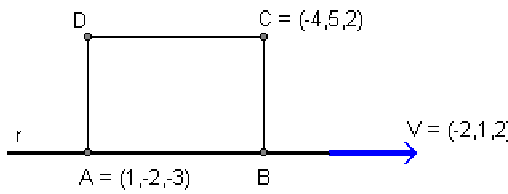
GAAL - Segunda Prova - 11/maio/2013
SOLUÇÕES

Questão 1: Considere a reta r que passa pelo ponto $A = (1, -2, -3)$ e tem vetor diretor $V = (-2, 1, 2)$. Dado o ponto $C = (-4, 5, 2)$ determine pontos B e D tais que:

1. o ponto B está na reta r e
2. o quadrilátero $ABCD$ é um retângulo.

SOLUÇÃO: A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.



Como a reta r passa por $A = (1, -2, -3)$ e tem vetor diretor $V = (-2, 1, 2)$, sua equação paramétrica pode ser

$$r: \ (x, y, z) = (1, -2, -3) + t(-2, 1, 2).$$

Como o ponto B pertence a reta r, as coordenadas de B são da forma

$$B \ = \ (1 - 2t, \ -2 + t, \ -3 + 2t). \qquad (*)$$

O vetor $\overrightarrow{CB} = (5 - 2t, -7 + t, -5 + 2t)$ é ortogonal a reta r. Logo este vetor é ortogonal ao vetor diretor de r e portanto vemos que $\langle \overrightarrow{CB}, V \rangle = 0$. Calculando o produto escalar obtemos

$$-2(5 - 2t) + (-7 + t) + 2(-5 + 2t) = 0.$$

A solução desta equação é $t = 3$. Substituindo este valor de t na equação **(*)**, obtemos $B = (-5, 1, 3)$.

Para determinar o ponto D observe que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ pois segmentos orientados de mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento definem o mesmo vetor. Daí vemos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad D - A = C - B \quad \Rightarrow \quad D = A - B + C \quad \Rightarrow \quad D = (2, 2, -4).$$

Portanto $B = (-5, 1, 3)$ e $D = (2, 2, -4)$.

Questão 2: Considere o plano π e a reta r de equações

$$\pi: \; 2x - y + z = 2$$
$$r: \; (x, y, z) = (-1, 8, -3) + t(1, -1, 2).$$

(a) Determine as coordenadas do ponto $P = r \cap \pi$.

(b) Determine a equação do plano α que contém r é perpendicular ao plano π.

SOLUÇÃO:

(a) Como o ponto P pertence a reta r, as coordenadas de P satisfazem a equação paramétrica de r. Assim podemos escrever

$$P \; = \; (-1 + t, \; 8 - t, \; -3 + 2t).$$

Como este ponto também está no plano π, as coordenadas de P devem satisfazer a equação de π. Daí substituindo $x = -1 + t$, $y = 8 - t$ e $z = -3 + 2t$ em $2x - y + z = 2$ obtemos

$$2(-1 + t) - (8 - t) + (-3 + 2t) = 2.$$

Resolvendo esta equação obtemos $t = 3$. Substituindo este valor de t na equação paramétrica de r, obtemos $P = (2, 5, 3)$.

(b) Como a reta r está contida no plano procurado α, vemos que o vetor diretor $V_r = (1, -1, 2)$ é paralelo a α. Por outro lado, como os planos α e π são ortogonais, o vetor normal $N_\pi = (2, -1, 1)$ é paralelo ao plano procurado α. Então, como os vetores V_r e N_π são paralelos ao plano α, um vetor normal deste plano pode ser o produto vetorial $N_\alpha = V_r \times N_\pi$.

$$N_\alpha = V_r \times N_\pi = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (1, 3, 1).$$

Daí segue que o plano α tem equação do tipo $x + 3y + z = d$. Como este plano deve conter a reta r, esta equação deve ser satisfeita por todos os pontos de r. Daí substituindo $x = -1 + t$, $y = 8 - t$ e $z = -3 + 2t$ em $x + 3y + z = d$ obtemos

$$(-1 + t) + 3(8 - t) + (-3 + 2t) = d.$$

Desta equação obtemos $d = 20$. Portanto o plano α tem equação $x + 3y + z = 20$.

Questão 3: Considere as retas r e s de equações paramétricas.

$$r: \ (x,y,z) = (4,3,1) + t(1,0,1).$$
$$s: \ (x,y,z) = (6,-7,-1) + s(2,2,1).$$

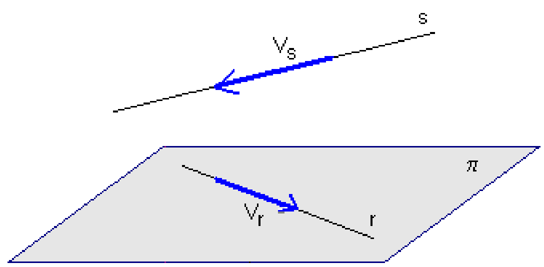
(a) Determine a equação geral do plano π que contém a reta r e que é paralelo a reta s.

(b) Calcule a distância da reta s ao plano π.

(c) Se ℓ é uma reta contida em π de modo que ℓ e s são retas reversas, calcule $\text{dist}(\ell, s)$.

SOLUÇÃO:

(a) Como a reta r está contida em π e como a reta s é paralela ao plano π vemos que os vetores diretores $V_r = (1,0,1)$ e $V_s = (2,2,1)$ são paralelos a π.



Daí um vetor normal deste plano pode ser o produto vetorial $N_\pi = V_r \times V_s$.

$$N_\pi = V_r \times V_s = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-2,1,2).$$

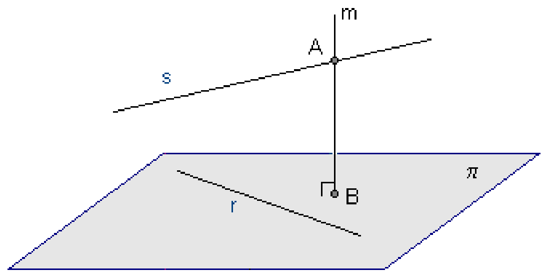
Como as coordenadas de um vetor normal são os coeficientes da equação geral do plano, vemos que o plano procurado tem equação da forma $-2x+y+2z = d$. Como este plano contém a reta r, da equação paramétrica de r, a equação $-2x+y+2z = d$ deve ser satisfeita para $x = 4+t$, $y = 3$ e $z = 1+t$. Daí

$$-2(4+t) + (3) + 2(1+t) = d.$$

Daí obtemos $d = -3$ e podemos concluir que π tem equação geral $-2x+y+2z = -3$.

(b) Para calcular a distância da reta s ao plano π vamos proceder do seguinte modo:

- Vamos fixar um ponto A da reta s.
- Vamos traçar a reta m que passa por A e é perpendicular ao plano π.
- Vamos calcular o ponto de interseção $B = \pi \cap m$.
- Finalmente vamos observar que $\text{dist}(s,\pi) = \text{dist}(A,B)$.



Seguindo esta estratégia, vamos considerar o ponto $A = (6, -7, -1)$ da reta s. O vetor diretor da reta m é o vetor normal $N_\pi = (-2, 1, 2)$. Portanto a equação paramétrica de m pode ser

$$m: \ (x, y, z) = (6, -7, -1) + t(-2, 1, 2).$$

Substituindo as coordenadas x, y, z desta equação paramétrica na equação $-2x + y + 2z = -3$ de π obtemos

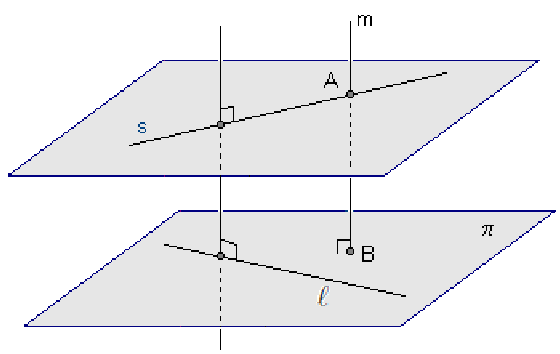
$$-2(6 - 2t) + (-7 + t) + 2(-1 + 2t) = -3$$

cuja solução é $t = 2$. Substituindo este valor de t na equação de m obtemos o ponto $B = (2, -5, 3)$.

De $A = (6, -7, -1)$ e $B = (2, -5, 3)$ obtemos $\overrightarrow{AB} = (-4, 2, 4)$ e portanto

$$\text{dist}(s, \pi) \ = \| \overrightarrow{AB} \| = \ \sqrt{16 + 4 + 16} \ = \ \sqrt{36} \ = \ 6.$$

(c) Seja ℓ uma reta contida em π tal que ℓ e s são retas reversas. Sabemos que duas retas reversas sempre moram em planos paralelos e que a distância entre estas retas é, de fato, igual a distância entre estes planos.



Do que foi observado (analise a figua acima) segue que

$$\text{dist}(\ell, s) \ = \ \text{dist}(s, \pi) \ = \| \overrightarrow{AB} \| = \ 6.$$