**GAAL - Primeira Prova - 06/abril/2013**
**SOLUÇÕES**

**Questão 1:** Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas $x$, $y$ e $z$.

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ -x + y + 2z = 2 \\ -x - y + az = -a \end{cases}$$

Determine todos os valores de $a$ para os quais o sistema:

(a) tem uma única solução;

(b) não tem solução;

(c) tem infinitas soluções. Neste caso, determine o conjunto solução do sistema.

SOLUÇÃO: Sabemos que o sistema linear $AX = B$ possui uma única solução quando $\det(A) \neq 0$. No nosso caso,

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix} = a^2 - a \ .$$

Portanto o sistema possui uma única solução quando $a^2 - a \neq 0$, ou seja, quando $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Vamos analisar agora o que acontece com os casos $a = 0$ e $a = 1$.

Suponhamos inicialmente que $a = 0$. Substituindo este valor na matriz aumentada do sistema linear dado obtemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Efetuando as operações elementares $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Efetuando a operação elementar $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

A última equação deste sistema é $0x + 0y + 0z = 4$. Neste caso o sistema é impossível.

Agora vamos analisar o caso $a = 1$. Substituindo este valor na matriz aumentada do sistema linear dado obtemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Efetuando as operações elementares $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz aumentada significa que $x+y-z=1$ e $2y+z=3$. Nesta segunda equação podemos escrever $z$ em termos de $y$ como $z = 3-2y$, considerando $y$ como variável livre. Substituindo este valor de $z$ na primeira equação, obtemos $x+y-z=1 \Rightarrow x+y-(3-2y)=1 \Rightarrow x+y-3+2y=1 \Rightarrow x+3y=4 \Rightarrow x=4-3y$.

Portanto, considerando $y = t$ como variável livre, vemos que

$$x = 4-3t \;\text{ e }\; z = 3-2t.$$

Neste caso o sistema possui, então, infinitas soluções dadas por:

$$S \;=\; \{\; (x,y,z) \;=\; (4-3t,\; t,\; 3-2t),\; \forall\, t \in \mathbb{R} \;\}.$$

Finalizando, as respostas deste exercício são:

(a) O sistema tem uma única solução se $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

(b) O sistema não tem solução se $a = 0$.

(c) O sistema possui infinitas soluções se $a = 1$. Neste caso o conjunto solução é

$$S \;=\; \{\; (x,y,z) \;=\; (4-3t,\; t,\; 3-2t),\; \forall\, t \in \mathbb{R} \;\}.$$

**Observação.** No item (c) também é possível escolher $z$ como variável livre. Para fazer isso, vamos continuar o escalonamento até obter uma matriz na forma escalonada reduzida. Então, continuando de onde tinhamos parado, dividindo a segunda linha por 2 obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Efetuando a operação elementar $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Neste sistema podemos tirar $x$ e $y$ em termos de $z$, obtendo

$$x = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}.$$

Assim, considerando $z$ como variável livre, o conjunto solução pode ser escrito do seguinte modo:

$$S = \left\{ (x, y, z) = \left(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2},\ z\right),\ \forall\ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Questão 2:**

(a) Determine, caso exista, a inversa da matriz $B$.

(b) Calcule também o determinante de $B$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO: Vamos calcular $B^{-1}$ escalonando a matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Efetuando as operações elementares $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ obtemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Efetuando as operações elementares $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ obtemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Efetuando as operações elementares $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ e $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$ obtemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Finalmente trocando o sinal da quarta linha obtemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Como obtemos a matriz identidade do lado esquerdo, concluímos que $B$ é invertível e que $B^{-1}$ é a matriz que está escrita do lado direito, ou seja,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de $B$, observe que durante o escalonamento a única operação elementar que afetou o determinante foi a última: troca do sinal da quarta linha. Esta operação troca o sinal do determinante. Como chegamos na matriz identidade, que tem determinante igual a 1, podemos concluir que $\det(B) = -1$.

Alternativamente, para calcular $\det(B)$, podemos fazer o desenvolvimento em cofator pela segunda linha, obtendo

$$\det(B) \;=\; 1 \times (-1)^{2+2} \times \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \;=\; 1 \times 1 \times (-1) \;=\; -1.$$

**Questão 3:** Diga se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$ tal que $A^t = -A$. Então $\det(A) = 0$.

(b) Sejam $A$ e $B$ matrizes $n \times n$ tais que $AB = \bar{0}$. Então $BA = \bar{0}$.

(c) Seja $A$ uma matriz $m \times n$ e seja $B$ uma matriz $m \times 1$. Se $X_1$ e $X_2$ são soluções do sistema linear $AX = B$, então $2X_1 - X_2$ também é uma solução deste mesmo sistema linear $AX = B$.

SOLUÇÃO:

(a) (Falsa) Calculando o determinante dos dois lados da igualdade $A^t = -A$ obtemos $\det(A^t) = \det(-A)$. Usando as propriedades do determinante obtemos $\det(A) = (-1)^2 \det(A)$, ou seja, $\det(A) = \det(A)$. Portanto a equação $A^t = -A$ não implica que $\det(A) = 0$. Para ver um contra-exemplo, considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz é fácil ver que $A^t = -A$ e que $\det(A) = 1$.

(b) (Falsa) Sejam $A$ e $B$ as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para estas duas matrizes temos que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) (Verdadeira) Se $X_1$ e $X_2$ são soluções, então $AX_1 = B$ e $AX_2 = B$. Daí

$$A(2X_1 - X_2) = 2(AX_1) - (AX_2) = 2B - B = B.$$

Logo $2X_1 - X_2$ também é solução.