MAT 0105 - Geometria Analítica

Turma 21 - Licenciatura em Física (diurno)

Recperação - 18 de julho de 2011

Nome : ____

Número USP : ____

Assinatura : ____

Professor : Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1: Ache o foco, o vértice e a reta diretriz da parábola $y = x^2 - 2x$.

SOLUÇÃO: Completando quadrados, temos:

$$y = x^2 - 2x \iff y + 1 = (x - 1)^2.$$

Nas coordenadas $x' = x-1$, $y' = y+1$, a equação da parábola é $y' = (x')^2$. Esta parábola tem foco em $(x', y') = (0, \frac{1}{4})$, vértice em $(x', y') = (0, 0)$ e reta diretriz $y' = -\frac{1}{4}$. Nas coordenadas originais, o foco é dado por $F = (0 + 1, \frac{1}{4} - 1) = (1, -\frac{3}{4})$, o vértice é dado por $V = (1, -1)$ e a reta diretriz por $y = -\frac{5}{4}$.

Questão 2: Ache as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = y$ que são paralelas à reta $y + x = 0$.

SOLUÇÃO: As retas paralelas à reta $y+x = 0$ têm equação $y+x = b$, $b \in \mathbb{R}$. Queremos portanto determinar os valores de b tais que a reta $x + y = b$ intersecte a circunferência dada em apenas um ponto. Isto é, queremos que o sistema seguinte tenha apenas uma solução:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = y \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (b - x)^2 = b - x \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + (1 - 2b)x + (b^2 - b) = 0 \\ x + y = b \end{cases}$$

O sistema terá solução única se, e somente se, a equação de segundo grau $2x^2 + (1 - 2b)x + (b^2 - b) = 0$ tiver solução única. Isto acontecerá precisamente quando o discriminante da equação for nulo. Devemos portanto resolver a seguinte equação para determinar b:

$$(1 - 2b)^2 - 8(b^2 - b) = 0 \iff 4b^2 - 4b - 1 = 0 \iff b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Achamos assim duas retas tangentes à circunferência dada que são paralalelas à reta dada:

$$x + y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x + y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 3: Mostre que as retas $r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e $r_2 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 + s \\ z = -2s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$, são paralelas e ache a equação do plano que as contém.

Solução: Os coeficientes do parâmetro nas equações paramétricas de uma reta são as coordendas de um vetor paralelo à reta. Logo, $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 1, -2)$ são paralelos, respectivamente, a r_1 e a r_2. Como $\vec{u} = -\vec{v}$, segue que, ou as retas r_1 e r_2 são paralelas, ou são coincidentes. O ponto $A = (0, 1, 1)$ pertence à reta r_1 (correspondente a $t = 0$), mas A não pertence a r_2, pois não existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $(1 - s, 3 + s, -2s) = (0, 1, 1)$. Logo, as retas são paralelas.

O ponto $B = (1, 3, 0)$ pertence a r_2 (correspondente a $s = 0$). Logo, o vetor $\vec{AB} = (1, 2, -1)$ é paralelo ao plano que contém as duas retas. O vetor $\vec{u}$ também é. Logo, o produto vetorial $\vec{AB} \times \vec{u}$ é perpendicular ao plano. Temos:

$$\vec{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, -3).$$

Qualquer múltiplo escalar de $(3, -3, -3)$ também será perpendicular ao plano. Podemos então tomar como vetor normal ao plano $\vec{n} = (1, -1, -1)$. A equação do plano é então da forma $x - y - z = d$, para algum d. O valor de d pode ser deteminado impondo que o ponto A satisfaça a equação: $0 - 1 - 1 = d$, logo $d = -2$. Assim, a equação do plano que contém r_1 e r_2 é $x - y - z = -2$.

Questão 4: Ache o simétrico do ponto $(1, 1, 1)$ em relação ao plano $x + 2y + 3z = -8$.

Solução: A reta que passa por $A = (1, 1, 1)$ e é paralela ao plano dado tem equações paramétricas

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t).$$

O ponto P desta reta que pertence também ao plano corresponde ao valor de t que é solução da equação

$$(1 + t) + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t) = 6 + 14t = -8,$$

logo $t = -1$ e $P = (0, -1, -2)$. O ponto P é a projeção de A no plano. O simétrico de A em relação ao plano é $A' = P + \vec{AP}$, logo $A = (0, -1, -2) + (-1, -2, -3) = (-1, -3, -5)$.