Cálculo I: Gabarito 1a prova, Turmas R1, R2, OL. 13 de abril de 2013, 8h00, **Duração: 1h40.**

1. (7pts) Resolva $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2-x}$.

   Para começar, observe que é preciso considerar somente $x \neq 0$, $x \neq 2$. Colocando os termos do mesmo lado e colocando no mesmo denominador, obtemos $\frac{2(x-1)}{x(x-2)} \geq 0$ (**1pts**). Montando uma linha para cada termo que depende de x,

		0		1		2	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2(x-1)}{x(x-2)}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

   Portanto, o conjunto de soluções da desigualdade é $S = (0,1] \cup (2,\infty)$ (**6pts**).

   Observação: Multiplicar os dois lados da desigualdade por $x(2-x)$ para obter a desigualdade $2-x \geq x$ é um erro, pois não é verdade que $x(2-x) \geq 0$ para todo x. Quem fez isso deve ter encontrado a solução errada $(-\infty,1]$. Neste caso demos 2 pontos.

2. (8pts) Determine todas as assíntotas de $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^2-2x}$. A reta $x=2$ é assíntota vertical? Justifique.

   Procuremos primeiro assíntotas horizontais, calculando limites quando x tende a $+\infty$ e $-\infty$. Para começar, calculemos $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Quando x toma valores grandes, os termos de grau maior são mais importantes. No caso, são os termos de grau 2 que devem ser mais importantes. Portanto, coloquemos eles em evidência, e simplifiquemos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\,.$$

   Como cada um dos termos $7/x$, $10/x^2$ e $2/x$ tende a zero quando $x\to\infty$, o numerador e o denominador ambos tendem a 1. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1\,.(\mathbf{2.5pts})$$

   Portanto, *a reta horizontal de equação $y=1$ é assíntota horizontal (a direita)*(**0.5pts**). Mas quando x tende a $-\infty$, são também os termos de grau 2 que dominam, e a mesma colocação em evidência pode ser feita, e conclui-se que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1\,.$$

   Portanto, *a reta horizontal de equação $y=1$ é assíntota horizontal (a esquerda).* Finalmente, procuremos assíntotas verticais. Para isso, os candidatos só podem vir de uma divisão por zero. Mas o denominador se anula se e somente se $x^2-2x = x(x-2) = 0$. Assim, os candidatos são $x=0$ e $x=2$. Para determinar se tem de fato assíntotas verticais nesses pontos, é preciso calcular limites laterais. Comecemos com

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{tende a } +\infty} \underbrace{\frac{x^2-7x+10}{x-2}}_{\text{tende a } \frac{10}{-2}=-5}$$

   Logo, $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ (**1.5pts**). Portanto, *a reta vertical de equação $x=0$ é assíntota vertical* (**0.5pts**).

   (Lembre-se que, para que haja uma assíntota vertical em um ponto, basta que um dos limites laterais nesse ponto seja igual a $\pm\infty$. Assim, mesma conclusão pode ser obtida calculando-se o seguinte limite:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{tende a } -\infty} \underbrace{\frac{x^2-7x+10}{x-2}}_{\text{tende a } \frac{10}{-2}=-5}$$

   Logo, $\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$.)

   Falta estudar os limites laterais em 2. Neste caso, o limite é da forma "$\frac{0}{0}$", mas dá pra fatorar o numerador também, obtendo

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{(x-5)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{x-5}{x} = \frac{-3}{2} = -\tfrac{3}{2}\,(\mathbf{2pts}).$$

   Logo, os dois limites laterais $\lim_{x\to2^\pm} f(x)$ existem e são finitos (ambos valem 3/2!). Portanto, a reta vertical $x=2$ *não é assíntota vertical* (para ser, pelo menos um dos limites laterais $x\to2^\pm$ deveria ser $\pm\infty$) (**1.0pts**).

3. (7pts) Se $f(x) = \sqrt{x+2}$, calcule $\lim_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

   Injetando os valores na função, o limite que se trata de calcular é

$$\lim_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{(1+h)+2}-\sqrt{3}}{h}(\mathbf{2pts}) = \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\,,$$

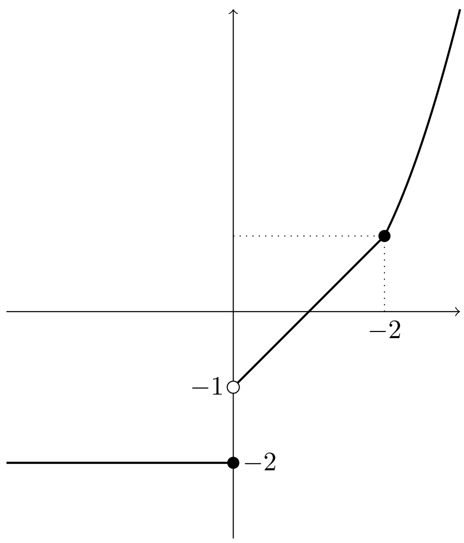
que é da forma indeterminada "$\frac{0}{0}$". Multiplicando e dividindo pelo conjugado,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}(\mathbf{2pts}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3+h})^2-\sqrt{3}^2)}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}(\mathbf{2pts}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathbf{1pts}) = \frac{\sqrt{3}}{6}\,.
\end{aligned}$$

4. (8pts) Seja $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leq 0\,, \\ x-1 & \text{se } 0 < x \leq 2\,, \\ x^2-2x+1 & \text{se } x > 2\,. \end{cases}$. f é contínua em $x = 0$? em $x = 2$? Justifique, usando a definição de continuidade.

1) Vamos calcular os limites de $f(x)$ quando $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$. Para qualquer valor de $x \leq 0$ temos que $f(x) = -2$, assim $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$. Por outro lado, para valores de $x \geq 0$, mas próximo de 0, temos que $f(x) = x-1$. Assim, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x-1 = -1$. Como esses limites laterais calculados são distintos, a função não é contínua em $x = 0$ (**4pts**).

3) Vamos calcular os limites de $f(x)$ quando $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$. Para valor esde $x \leq 2$ próximo a 2, temos que $f(x) = x-1$, assim $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x-1 = 1$. Por outro lado, para qualquer valores de $x > 2$ temos que $f(x) = x^2-2x+1$ assim, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2-2x+1 = 2^2-2\cdot 2+1 = 1$. Como os limites laterais são iguais, temos que existe o limite $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ (**2pts**). Como ainda $f(2) = 1$, temos que a função é contínua (**2pts**).



5. (BONUS) Considere $f : [-1,0] \to C$ definida por $f(x) = 2^x + 1$. Determine C para que f seja uma bijeção, e dê a expressão completa da sua função inversa.

A função $f(x) = 2^x + 1$ é crescente e contínua. Como $f(-1) = 3/2$ e $f(0) = 2$, temos que a imagem do intervalo $[-1,0]$ pela função f é igual ao intervalo $[3/2,2]$. Além disso ela é uma bijeção entre esses dois intervalos. Assim, $C = [3/2,2]$ é o conjunto C procurado. Vamos agora encontrar uma expressão para a função inversa $f^{-1} : [3/2,2] \to [-1,0]$. Para um dado $x \in [-1,0]$ seja $y \in [3/2,2]$ tal que $y = 2^x + 1$. Então temos que:

$$y = 2^x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2(y-1).$$

Logo a função inversa é $f^{-1}(y) = \log_2(y-1)$ (**5pts**).