MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

Prova Substitutiva -06/12/2010

A e B

Turma: ______________

Nome: ______________________________

Nº USP: ______________________________

Professor: ______________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. Seja $f(x,y) = \cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

   (a) **(1,5)** Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ contínua? JUSTIFIQUE!

   (b) **(0,5)** Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? JUSTIFIQUE!

(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{3} x \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}}$.

Em $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{x^2} - 1}{x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x^{2/3}) \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3}}{1}$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3} \frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}} \cdot \cancel{x^{1/3}} = 0$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (x,y)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \frac{x\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}}_{\to 1} \cdot \sqrt[3]{\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Assim $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Como $f(x,y) = f(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em $\mathbb{R}^2$. Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e portanto DIFERENCIÁVEL em $\mathbb{R}^2$.

A

2. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Seja

$$g(u,v) = uf(2uv, 2u-v) + \frac{\partial f}{\partial x}(2uv, 2u-v).$$

(a) **(1,5)** Encontre $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

(b) **(1,0)** Sabendo que $3x - 10y + 25z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2,1))$ e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = -\frac{3}{25} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{4}{125},$$

calcule $\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)$.

---

(2) (a) Seja $x = x(u,v) = 2uv$ e $y = y(u,v) = 2u - v$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(x,y) + u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,2v + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot 2\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot 2v + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\cdot 2,$$

$$= f(2uv, 2u-v) + 2u\left[v\frac{\partial f}{\partial x}(2uv, 2u-v) + \frac{\partial f}{\partial y}(2uv, 2u-v)\right] + 2\left[v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2uv, 2u-v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2uv, 2u-v)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(-1)\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\cdot(-1)$$

$$= u\left[2u\frac{\partial f}{\partial x}(2uv, 2u-v) - \frac{\partial f}{\partial y}(2uv, 2u-v)\right] + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2uv, 2u-v) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2uv, 2u-v).$$

(b) Sendo $3x - 10y + 25z = 6$ a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2,1))$ obtemos que

$$6 - 10 + 25 f(2,1) = 6$$

Logo $f(2,1) = \frac{10}{25}$

Também $(3, -10, 25) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1), -1 \right)$

Logo $\lambda = -25$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{3}{25} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{10}{25}.$$

Quando $(u,v) = (1,1)$, $(x,y) = (2,1)$ e do item (a) temos então que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(1,1) = \frac{10}{25} + 2\left[-\frac{3}{25} + \frac{10}{25}\right] + 2\left[\frac{4}{125} - \frac{3}{25}\right]$$

//

3. Seja $f(x,y,z) = xz + y$.

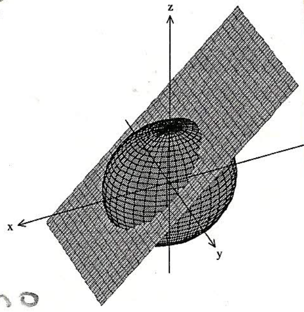
   (a) **(1,5)** Determine os pontos de máximo e de mínimo de f no elipsoide de equação
   $$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4.$$

   (b) **(1,0)** Seja C a curva dada pela intersecção do elipsoide do item (a) (que tem equação $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$) com o plano de equação $x + z = 1$. Determine os pontos de máximo e de mínimo de f em C.

   (c) **(0,5)** Seja
   $$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad x + z \geq 1\}.$$

   Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em R. JUSTIFIQUE!

(a) Seja $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$
e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,z) = 4\}$
$\nabla g(x,y,z) = (2x, 4y, 2z) \neq \vec{0}$
$\forall (x,y,z) \in S$.
Como a função f é contínua e S é um conjunto compacto, temos que f tem máximo e mínimo em S. Vamos usar o método dos Multiplicadores de Lagrange para determiná-los. $\longrightarrow$ (*)



$\longrightarrow$ (*) Eles estão entre os pontos $(x,y,z) \in S$ que satisfazem: $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$.
Então, queremos $(x,y,z) \in S$ com $\nabla f(x,y,z) \wedge \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$ $\longrightarrow$ (**)

(**) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z & 1 & x \\ x & 2y & z \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} z - 2xy = 0 & (1) \\ z^2 - x^2 = 0 & (2) \\ 2yz - x = 0 & (3) \end{cases}$

De (2) temos que $z = \pm x$.

$\boxed{\text{Caso } z = x}$ Em (1) (ou (3)) $\Rightarrow x(1-2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 1/2$.
$x = 0 \Rightarrow z = 0$ e como $(x,y,z) \in S$, $y = \pm\sqrt{2}$. Temos os pontos $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$.
Se $y = 1/2$ temos $x^2 + 2\cdot\frac{1}{4} + x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$. Daí obtemos os pontos $(\sqrt{7}/2, 1/2, \sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, 1/2, -\sqrt{7}/2)$.

Caso $z = -x$ Em (1) (ou (3)) $\Rightarrow x(1+2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = -1/2$.
$x = 0$, é como antes. Se $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 2\cdot\frac{1}{4} + x^2 = 4$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$. Como $x = -z$, temos os pontos $(\sqrt{7}/2, -1/2, -\sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, -1/2, \sqrt{7}/2)$.

Candidato (x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	Conclusão
$(0, \pm\sqrt{2}, 0)$	$\pm\sqrt{2}$	
$(\sqrt{7}/2, 1/2, \sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, 1/2, -\sqrt{7}/2)$	$7/4 + 2/4 = 9/4$	MÁXIMO
$(\sqrt{7}/2, -1/2, -\sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, -1/2, \sqrt{7}/2)$	$-9/4$	MÍNIMO

(b) Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+z^2 = 4 \text{ e } x+z=1\}$

Sejam $g(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$ e $h(x,y,z) = x+z$.

Temos que g e h são de classe C^1 e

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (4y, 2(x-z), 4y) \neq \vec{0}$$

Se $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = \vec{0} \Rightarrow y = 0$ e $x = z$.

$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = z = 1/2$. Mas $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 4$!!

$x+z=1$

Assim podemos usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os pontos de máximo e mínimo de f em C estão entre os pontos $(x,y,z) \in C$ que satisfazem

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$

$\Rightarrow [\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)] = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ z & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2xy - z + x - 2yz = 0 \Rightarrow$$

$$(x-z) + 2y(x-z) = 0 \Rightarrow (1+2y)(x-z) = 0.$$

Logo $(x,y,z) \in C$ e $1+2y = 0$ ou $x = z$.

Caso $\boxed{y = -1/2}$

$x + z = 1 \Rightarrow z = 1-x$

$x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = 4$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+20}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$. Temos então os pontos:

$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Caso $\boxed{x = z}$

$2x = 1 \Rightarrow x = 1/2 = z$

$(1/2)^2 + 2y^2 + (1/2)^2 = 4 \Rightarrow 2y^2 = 4 - 1/2 \Rightarrow$

$y^2 = 7/4 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Daí temos os pontos:

$\left(1/2, \sqrt{7}/2, 1/2\right)$ e $\left(1/2, -\sqrt{7}/2, 1/2\right)$

Analisando

(x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	
$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{1}{2} = -7/4$	MÍNIMO
$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$		
$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{7}/2, 1/2\right)$	$1/4 + \sqrt{7}/2$	MÁXIMO
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}, 1/2\right)$	$1/4 - \sqrt{7}/2$	

(c) Observe que

$$\nabla f(x,y,z) = (z, 1, x) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y,z).$$

Assim, f NÃO tem pontos críticos, em particular, não tem pontos críticos no interior de R.

Também, $\nabla h(x,y,z) = (1, 0, 1)$

Logo, $\nabla f(x,y,z) = (z, 1, x)$, nunca será paralelo ao $\nabla h(x,y,z)$. Logo não há candidatos a pontos de máximo ou mínimo de f em R que estejam no plano $x + z = 1$.

Assim os candidatos são os pontos do item (b) do item (a), o único ponto que satisfaz a condição $x + z \geq 1$ é $\left(\sqrt{7}/2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Assim: $\left(\sqrt{7}/2, \frac{1}{2}, \sqrt{7}/2\right)$ é ponto de máximo de f em R e os pontos $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ são pontos de mínimo.

4. Seja

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x^2 + 3y^2 \text{ e } z = (x-1)^2 + (y-2)^2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para C, isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função derivável $\Gamma : I \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é C.

(b) **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$. Suponha que C esteja contida em uma superfície de nível de f e que o plano tangente a essa superfície no ponto $(-1,1,5)$ passe pelo ponto $(1,4,7)$. Determine a direção e sentido de crescimento máximo de f em $(-1,1,5)$.

(a) $\begin{cases} z = 2x^2+3y^2 \\ z = (x-1)^2+(y-2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x^2+3y^2 \\ 2x^2+3y^2 = (x-1)^2+(y-2)^2 \end{cases}$

$2x^2+3y^2 = x^2-2x+1+y^2-4y+4$

$\iff x^2+2x+2y^2+4y = 5 \iff$

$(x+1)^2+2(y+1)^2 = 8$. Assim, $\forall (x,y)$, existe $t \in [0, 2\pi]$

tal que $\frac{x+1}{2\sqrt{2}} = \cos t$ e $\frac{y+1}{2} = \operatorname{sen} t$.

Logo $\Gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\Gamma(t) = \left(-1+2\sqrt{2}\cos t,\ -1+2\operatorname{sen} t,\ 2(-1+2\sqrt{2}\cos t)^2+3(-1+2\operatorname{sen} t)^2\right)$

é uma parametrização de C.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = k\}$ $(k = f(-1,1,5))$

Suponha que $\nabla f(-1,1,5) = \vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$ pois $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$).

Seja $P = (-1,1,5)$ e $Q = (1,4,7)$. Como Q pertence ao plano tangente à S em $(-1,1,5)$, temos que $\vec{v} \perp \vec{PQ}$,

Logo $\vec{v} \perp (2,3,2)$.

Já que a curva $C \subset S$, a reta tangente à C em $(-1,1,5)$ está contida no plano tangente à S em $(-1,1,5)$.

Usando a parametrização obtida em (a) temos que $\Gamma(\pi/2) = (-1,1,5)$. Logo $\Gamma'(\pi/2)$ é também paralelo ao plano tangente à S.

$\Gamma'(t) = \left(-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ 4(1+2\sqrt{2}\cos t)\cdot(-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t)+6(-1+2\operatorname{sen} t)2\cos t\right)$

$\Gamma'(\pi/2) = (-2\sqrt{2}, 0, -8\sqrt{2})$. Assim $\vec{v} \parallel (2,3,2) \wedge (-1,0,4)$.

Calculando o produto vetorial, obtemos $\vec{v} \parallel (-12, 10, -3)$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$, temos que $\vec{v}$ tem a direção e sentido do vetor $(12,-10,3)$.

B

2. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Seja

$$g(u,v) = uf(2u - v, 2uv) + \frac{\partial f}{\partial y}(2u - v, 2uv).$$

(a) **(1,5)** Encontre $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

(b) **(1,0)** Sabendo que $10x - 3y - 25z = -6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1,2))$ e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = -\frac{3}{25} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = \frac{4}{125},$$

calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,1)$.

(a) Seja $x = x(u,v) = 2u - v$ e $y = y(u,v) = 2uv$. Então $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = 2$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = -1$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = 2v$ e $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = 2u$.

Assim, como f é de classe C^2, as derivadas de ordem 2 de f são contínuas e assim $\frac{\partial f}{\partial x}$ é diferenciável. Também, f é de classe C^2, portanto, de classe C^1 e então f é diferenciável. Logo vale a Regra da Cadeia.

Assim:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(x,y) + u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, 2v\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot 2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, 2v.$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(2u-v, 2uv) + 2u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(2u-v, 2uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(2u-v, 2uv)\right] + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u-v, 2uv) + 2v\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u-v, 2uv).}$$

$$\boxed{\text{Analogamente, } \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(2u-v, 2uv)(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v, 2uv)\cdot 2u\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u-v, 2uv)(-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u-v, 2uv)\cdot 2u}$$

Sendo $10x - 3y - 25z = -6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(1, 2, f(1,2))$ temos que:

$$10 - 6 - 25 f(1,2) = -6 .$$

Logo $\boxed{f(1,2) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}}$

Também temos que $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(10, -3, -25) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1 \right)$$

Logo $\lambda = 25$ e

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{10}{25}} \quad e \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-3}{25}} .$$

Quando $(u,v) = (1,1)$ temos que $(x,y) = (1,2)$.

Logo $\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(1,1) = \frac{2}{5} + 1\left[\frac{10}{25} + \frac{3}{25}\right] + 2.\left(\frac{-3}{25}\right) + 2.\frac{4}{125}}$

B

3. Seja $f(x,y,z) = xy + z$.

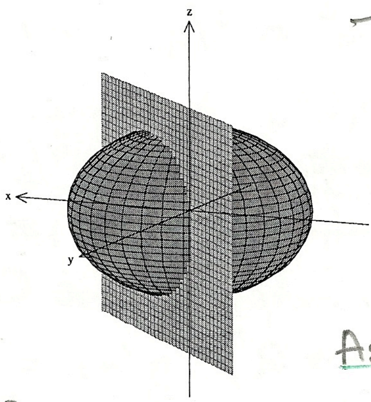
(a) **(1,5)** Determine os pontos de máximo e de mínimo de f no elipsoide de equação
$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4.$$

(b) **(1,0)** Seja C a curva dada pela intersecção do elipsoide do item (a) (que tem equação $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$) com o plano de equação $x + y = 1$ Determine os pontos de máximo e de mínimo de f em C.

(c) **(0,5)** Seja
$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad x + y \geq 1\}.$$

Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em R. JUSTIFIQUE!

(a) É claro que $f(x,y,z) = xy + z$ é contínua e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 4\}$ é um compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em S.
Se $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, então g é de classe C^1 e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 4z) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y,z) \in S$.
Como f é diferenciável, podemos então usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Assim, os pontos de máximo e mínimo de f em S → continua



→ estão entre os pontos $(x,y,z) \in S$ que satisfazem: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$.

Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} y = 2\lambda x & (1) \\ x = 2\lambda y & (2) \\ 1 = 4\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: ①

De (1) e (2)

$y = 2\lambda x = 2\lambda(2\lambda y) = 4\lambda^2 y$

$y(1 - 4\lambda^2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $1 = 4\lambda^2$

Caso $y = 0 \Rightarrow x = 0$

Como $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, temos que $z = \pm\sqrt{2}$.

Temos os pontos $(0, 0, \pm\sqrt{2})$.

② Caso $\lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$

$\lambda = 1/2$ De (3) $z = 1/2$ e de (1) (ou (2)), $y = x$.

Usando (4) temos $2x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 4 \Rightarrow$

$2x^2 = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 7/4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$

Pontos: $(\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, 1/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, 1/2)$

③ $\lambda = -1/2 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = -y$. Usando (4) $\Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$. Daí, temos os pontos

$(\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, -1/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, -1/2)$

Analisando:

Candidato (x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$
$(0, 0, \pm\sqrt{2})$	$\pm\sqrt{2}$
$(\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, 1/2)$, $(-\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, +1/2)$	$\frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ MÁXIMO
$(\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, -1/2)$, $(-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, -1/2)$	$-9/4$ MÍNIMO

(b) Uma solução – parametrizando a curva

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+2z^2 = 4 \text{ e } x+y=1\}$

(para uma solução usando Lagrange, veja a prova A)

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2z^2=4 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+(1-x)^2+2z^2=4 \\ y=1-x \end{array}\right.$$

$$x^2+1+x^2-2x+2z^2=4 \iff z^2+x^2-x+\frac{1}{4} = 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\iff (x-\tfrac{1}{2})^2+z^2 = 7/4 \iff \left(\frac{x-1/2}{\sqrt{7}/2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{7}/2}\right)^2 = 1$$

Assim, $\exists\, t \in [0, 2\pi]$ tais que

$x = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\cos t$ e $z = \sqrt{7}/2\, \operatorname{sen} t$ e daí $y = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\cos t$.

Assim $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\cos t, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{sen} t\right)$

é uma parametrização de C.

Seja $g: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\gamma(t))$.

Então $g(t) = \frac{1}{4} - \frac{7}{4}\cos^2 t + \frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{sen} t$.

Nosso problema é então encontrar o máximo e o mínimo de g em $[0, 2\pi]$.

Candidatos: $t=0$ e $t=2\pi$ e os ptos críticos de g em $]0, 2\pi[$

$t=0$ e $t=2\pi$ / $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$

ptos críticos de g em $]0, 2\pi[$:

$g'(t) = \frac{7}{2}\cos t \operatorname{sen} t + \frac{\sqrt{7}}{2}\cos t = \frac{1}{2}\cos t\,(7\operatorname{sen} t + \sqrt{7})$

Logo $g'(t) = 0 \Rightarrow \cos t = 0$ ou $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \pi/2$ ou $t = 3\pi/2$, de onde obtemos os pontos $(1/2, \frac{1}{2}, \sqrt{7}/2)$ e $(1/2, 1/2, -\sqrt{7}/2)$.

Se $\operatorname{sen} t = -1/\sqrt{7}$, então $\cos t = \pm\sqrt{6}/\sqrt{7}$, donde obtemos os pontos $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Candidato (x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	
$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$	$-3/2$	
$(\frac{1}{2}, 1/2, \sqrt{7}/2)$	$1/4 + \sqrt{7}/2$	MÁXIMO
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{7}/2)$	$1/4 - \sqrt{7}/2$	
$(1/2+\sqrt{6}/2, 1/2-\sqrt{6}/2, -\frac{1}{2})$ e $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{1}{2} = -7/4$	MÍNIMO

(c) Observe que $\nabla f(x,y,z) = (y, x, 1) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Logo f NÃO tem pontos críticos. Em particular, não tem pontos críticos no interior de R.

Os ponte $(1/2, 1/2, \sqrt{7}/2) \in R$ e os pontos $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in R$ (pontos encontrados em (b)) são candidatos a pontos de máximo e de mínimo de f em R.

Dos pontos obtidos em (a) apenas $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ satisfaz $x+y \geq 1$. Assim, como $R \subset S$ e ele é ponto de máximo de f em S, ele será o ponto de máximo de f em R.

Se $h(x,y,z) = x+y$ então $\nabla f(x,y,z) = (y, x, 1)$ NUNCA será $\parallel$ ao $\nabla h(x,y,z) = (1,1,0)$.

Logo, não há candidato a ponto de mínimo de f em R satisfazendo $x+y=1$. Assim o mínimo de f em R é atingido nos pontos $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

B

4. Seja

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x^2 + 2y^2 \text{ e } z = (x-2)^2 + (y-1)^2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para C, isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função derivável $\Gamma : I \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é C.

(b) **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1,5) > 0$. Suponha que C esteja contida em uma superfície de nível de f e que o plano tangente a essa superfície no ponto $(1,-1,5)$ passe pelo ponto $(4,1,7)$. Determine a direção e sentido de crescimento máximo de f em $(1,-1,5)$.

(a) $\left.\begin{array}{l} z = 3x^2+2y^2 \\ z = (x-2)^2+(y-1)^2 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 3x^2+2y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 \\ z = 3x^2+2y^2 \end{array}\right.$

$3x^2+2y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 \iff 3x^2+2y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\iff 2x^2+4x+y^2+2y = 5 \iff 2(x+1)^2+(y+1)^2 = 8$

$\iff \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$

Assim, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, t \in [0,2\pi]$ tal que $x = -1 + 2\cos t$ e $y = -1 + 2\sqrt{2}\,\text{sen}\, t$.

Logo $\Gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definida por
$\Gamma(t) = (-1+2\cos t, -1+2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, 3(-1+2\cos t)^2 + 2(-1+2\sqrt{2}\,\text{sen}\,t)^2)$
é uma parametrização de C.

(b) Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = k\}$ $(k = f(1,-1,5))$ a superfície de nível de f que contém $(1,-1,5)$.

Seja $\vec{v} = \nabla f(1,-1,5)$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1,5) > 0$.

Como $C \subset S$, a reta tangente à C em $(1,-1,5)$ está contida no plano tangente a S em $(1,-1,5)$.

Se $g(x,y) = 3x^2+2y^2$ e $h(x,y) = (x-2)^2+(y-1)^2$ então $C = G_g \cap G_h$. Logo o vetor tangente à C em $(1,-1,5)$ é paralelo a $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,-1), \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,-1), -1\right) \wedge \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,-1), \dfrac{\partial h}{\partial y}(1,-1), -1\right)$, que é

$(6,-4,-1) \wedge (-2,-4,-1) = -8(0,1,4)$. Assim, $\vec{v} \perp (0,1,4)$.

Como $Q = (4,1,7)$ está no plano tangente à S em $P = (1,-1,5)$, $\vec{v} \perp \overrightarrow{PQ}$. Logo $\vec{v} \perp (3,2,2)$. Logo $\vec{v} \parallel (0,1,4) \wedge (3,2,2)$.

Calculando o produto vetorial obtemos que $\vec{v} \parallel (-10,12,3)$. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$, temos que $\vec{v}$ tem a direção e o sentido do vetor $(10,-12,3)$.