(2,0) **Questão 1.** Seja S a superfície de equação $x^2 - 2xy - 2y + z^2 = 1$ e seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida em S, tal que $\gamma(2) = (2, 2, 3)$ e $\gamma'(2) \neq (0, 0, 0)$.

Considere ainda uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $\nabla g(2, 2, 3) = (4, 0, -4)$.

Sabendo que $t_0 = 2$ é ponto de mínimo da função $\phi(t) = g(\gamma(t))$, determine uma equação para a reta tangente à trajetória (imagem) de γ em $\gamma(2)$.

Solução:

Observemos que a superfície S é a superfície de nível 1 da função de classe $\mathcal{C}^1$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2y + z^2$.

Do fato de que a imagem de γ está contida em S resulta que $\nabla f(2, 2, 3)$ é ortogonal à S e, portanto, que $\nabla f(2, 2, 3) = (0, -6, 6)$ é um vetor ortogonal a $\gamma'(2)$.

De outro lado, por ser $t_o = 2$ ponto de mínimo da função diferenciável $\phi(t) = g(\gamma(t))$ em $\mathbb{R}$, resulta que $\phi'(2) = 0$. Logo, pela regra da cadeia, obtemos que $\nabla g(\gamma(2)) \cdot \gamma'(2) = 0$, ou seja, $\nabla g(2, 2, 3)$ é também ortogonal a $\gamma'(2)$.

Desde que os vetores $\nabla f(2, 2, 3) = (0, -6, -6)$ e $\nabla g(2, 2, 3) = (4, 0, -4)$ formam uma conjunto linearmente independente e cada um deles é ortogonal a $\gamma'(2) \neq (0, 0, 0)$, podemos concluir que $\gamma'(2)$ é paralelo ao vetor $\nabla f(2, 2, 3) \wedge \nabla g(2, 2, 3) = (24, 24, 24)$.

Portanto uma equação da reta tangente pedida é $(x, y, z) = (2, 2, 3) + \lambda(1, 1, 1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veja a Q2B!

Questão 3. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ e classifique-os, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela.

Inicialmente calculemos as derivadas parciais da f:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$.

Agora determinemos os pontos críticos da f,

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos, $4x^3 + 4y^3 = 0$, logo $y^3 = -x^3$, assim $y = -x$. Substituindo em qualquer equação acima temos que, $0 = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$, logo $x = 0$, dai $y = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$, dai $y = \mp\sqrt{2}$. Então os pontos críticos da f são $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Classifiquemos estes pontos quanto a máximo e mínimo locais:

A função hessiano da f é dada por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{vmatrix} = 16\big[(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 1\big],$$

então $H(0,0) = 0$ e $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16.24 > 0$.

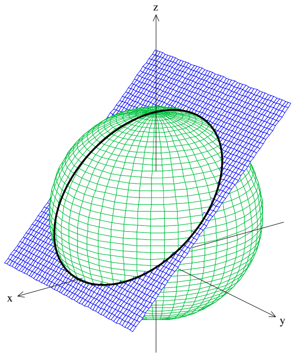
Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$, então $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ são pontos de mínimo locais da f.

Como $H(0,0) = 0$, então nada podemos afirmar sobre este ponto utilizando este método da função hessiano.

Notemos que $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ e $f(0,0) = 0$.

Por outro lado, $f(x,x) = 2x^4 \geq 0 = f(0,0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) \leq 0$ para todo $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Logo $(0,0)$ é ponto de sela!

(3,0) **Questão 4.** Determine, caso existam, os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ sobre o conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 5 \text{ e } x + z = 2\}$.



O conjunto D é fechado e limitado do $\mathbb{R}^3$, pois é um círculo contido no plano $x + z = 2$ delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$ e a função f é contínua em D. Logo o teorema de Weierstrass garante que f tem ponto de máximo e de mínimo em D.

Determinemos então os candidatos.

Sejam $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 5$ e $h(x,y,z) = x + z - 2$. Observamos que f é uma função diferenciável e as funções g e h são de classe C^1, pois são todas polinomiais.

I) Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f no plano $x + z = 2$ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{(4x, -2y, -2z), (1,0,1)\} \text{ é l.d.} \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4x & -2y & -2z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0) \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

Como $(-2)^2 + 0^2 + (4-1)^2 > 5$, temos que o ponto $(-2,0,4) \notin D$.

II) Seja γ a curva que é a intersecção do plano $x + z = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.

Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f sobre γ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 4x & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2(z-1) \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(3xy + y) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2,0,0),\ (-1,0,3) \text{ e } \left(-\tfrac{1}{3}, \pm\tfrac{2\sqrt{7}}{3}, \tfrac{7}{3}\right) \text{ são soluções do sistema.}$$

Como $f(2,0,0) = 8$, $f(-1,0,3) = -7$ e $f(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}) = -\frac{75}{9} = -8{,}333$, obtemos que $(2,0,0)$ é o ponto de máximo e $(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3})$ são os pontos de mínimo de f sobre D.

(2,0) **Questão 1.** Seja S a superfície de equação $x^2 - 3xy + 8y + 2(z-1)^2 = 8$ e seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida em S, tal que $\gamma(1) = (1,1,0)$ e $\gamma'(1) \neq (0,0,0)$.

Considere ainda uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $\nabla g(1,1,0) = (2,-2,0)$.

Sabendo que $t_0 = 1$ é ponto de mínimo da função $\phi(t) = g(\gamma(t))$, determine uma equação para a reta tangente à trajetória (imagem) de γ em $\gamma(1)$.

Solução:

Observemos que a superfície S é a superfície de nível 8 da função de classe $\mathcal{C}^1$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 8y + 2(z-1)^2$.

Do fato de que a imagem de γ está contida em S resulta que $\nabla f(1,1,0)$ é ortogonal à S e, portanto, que $\nabla f(1,1,0) = (-1,5,-4)$ é um vetor ortogonal a $\gamma'(1)$.

De outro lado, por ser $t_o = 2$ ponto de mínimo da função diferenciável $\phi(t) = g(\gamma(t))$ em $\mathbb{R}$, resulta que $\phi'(1) = 0$. Logo, pela regra da cadeia, obtemos que $\nabla g(\gamma(1) \cdot \gamma'(1) = 0$, ou seja, $\nabla g(1,1,0) = (2,-2,0)$ é também ortogonal a $\gamma'(1)$.

Desde que os vetores $\nabla f(1,1,0) = (-1,5,-4)$ e $\nabla g(1,1,0) = (2,-2,0)$ formam uma conjunto linearmente independente e cada um deles é ortogonal a $\gamma'(1) \neq (0,0,0)$, podemos concluir que $\gamma'(1)$ é paralelo ao vetor $\nabla f(1,1,0) \wedge \nabla g(1,1,0) = (-8,-8,-8)$.

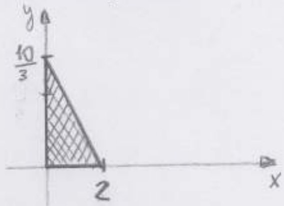
Portanto uma equação da reta tangente pedida é $(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2,5) **Questão 2.** Deseja-se encontrar os pontos de máximo e de mínimo de $f(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ sobre o conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0\}$.

a) O problema tem solução? Justifique.

b) Em caso afirmativo, determine tais pontos.

c) A função f acima tem ponto de máximo sobre o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 3y \leq 10, x > 0, y > 0\}$? E de mínimo? Justifique suas respostas.



a) Sim, pois K é compacto (limitado e fechado) e f é contínua em K.

b) Os candidatos a máximo e mínimo de f em $\mathring{K}$ (interior de K) devem satisfazer $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja, $\left(\frac{1}{4}\frac{y^{3/4}}{x^{3/4}}, \frac{3}{4}\frac{x^{1/4}}{y^{1/4}}\right) = (0,0)$, o que não ocorre, portanto f não possui pontos críticos em $\mathring{K}$.

O bordo de K é composto dos segmentos $\gamma_1(t) = (t,0)$, $0 \leq t \leq 2$

$\gamma_2(t) = (0,t)$, $0 \leq t \leq 10/3$ e o segmento da reta $5x+3y=10$ entre os pontos $(2,0)$ e $(0,10/3)$. Este pode ser visto como restrição da curva de nível 0 da função $g(x,y) = 5x+3y-10$ ao primeiro quadrante.

Claramente $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in K$ e $f(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in \mathring{K}$.

Além disso, $f(\gamma_1(t)) = 0$, $\forall t \in [0,2]$ e $f(\gamma_2(t)) = 0$, $\forall t \in [0,10/3]$.

Sobre o segmento (aberto) da curva de nível da função g acima podemos usar os multiplicadores de Lagrange (os extremos dele estão na imagem de γ_1 e γ_2).

O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} (y/x)^{3/4} & 3(x/y)^{1/4} \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ 5x+3y=10 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5x \\ 5x+3y=10 \end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Assim $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ é o único ponto crítico de f sobre aquela restrição, sendo um ponto de máximo, pois nos extremos do segmento (demais candidatos), a função vale 0. Os pontos de mínimo são aqueles na imagem de γ_1 e γ_2.

c) O conjunto D é o conjunto K, exceto a imagem de γ_1 e γ_2 (onde f atingia seu mínimo). Assim, f assume máximo em D no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e não assume mínimo, pois $f(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in D$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Questão 3. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$ e classifique-os, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela.

Inicialmente calculemos as derivadas parciais da f:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 6x + 6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 6x - 6y$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 6$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6$.

Agora determinemos os pontos críticos da f,

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x + 6y = 0, \\ 4y^3 + 6x - 6y = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos, $4x^3 + 4y^3 = 0$, logo $y^3 = -x^3$, assim $y = -x$. Substituindo em qualquer equação acima temos que, $0 = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$, logo $x = 0$, dai $y = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, dai $y = \mp\sqrt{3}$. Então os pontos críticos da f são $(0,0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Classifiquemos estes pontos quanto a máximo e mínimo locais:

A função hessiano da f é dada por

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 6 & 6 \\ 6 & 12y^2 - 6 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 2x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 2y^2 - 1 \end{vmatrix} = 36\big[(2x^2 - 1)(2y^2 - 1) - 1\big],$$

então $H(0,0) = 0$ e $H(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = H(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 36.24 > 0$.

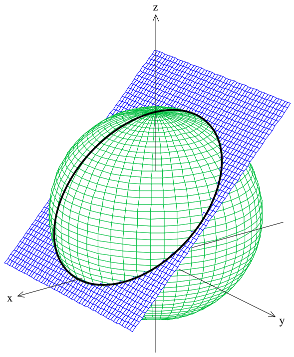
Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 30 > 0$, então $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são pontos de mínimo locais da f.

Como $H(0,0) = 0$, então nada podemos afirmar sobre este ponto utilizando este método da função hessiano.

Notemos que $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 6xy - 3y^2 = x^4 + y^4 - 3(x-y)^2$ e $f(0,0) = 0$.

Por outro lado, $f(x,x) = 2x^4 \geq 0 = f(0,0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x,0) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3) \leq 0$ para todo $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Logo $(0,0)$ é ponto de sela!

(3,0) **Questão 4.** Determine, caso existam, o ponto de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = 2z^2 - y^2 - x^2$ sobre o conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 5 \text{ e } y + z = 2\}$.



O conjunto D é fechado e limitado do $\mathbb{R}^3$, pois é um círculo contido no plano $y + z = 2$ delimitado pela esfera $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$ e a função f é contínua em D. Logo o teorema de Weierstrass garante que f tem ponto de máximo e de mínimo em D.

Determinemos então os candidatos.

Sejam $g(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 5$ e $h(x,y,z) = y + z - 2$. Observamos que f é uma função diferenciável e as funções g e h são de classe C^1, pois são todas polinomiais.

I) Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f no plano $y + z = 2$ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{(-2x, -2y, 4z), (0,1,1)\} \text{ é l.d.} \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2x & -2y & 4z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0) \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Como $0^2 + (4-1)^2 + (-2)^2 > 5$, temos que o ponto $(0,4,-2) \notin D$.

II) Seja γ a curva que é a intersecção do plano $y + z = 2$ com a esfera $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$.

Segundo o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, os candidatos a extremantes locais de f sobre γ são soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} -2x & -2y & 4z \\ 2x & 2(y-1) & 2z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(3xz + x) = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,2),\ (0,3,-1,) \text{ e } \left(\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ são soluções do sistema.}$$

Como $f(0,0,2) = 8$, $f(0,3,-1) = -7$ e $f\left(\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{75}{9} = -8{,}333$, obtemos que $(0,0,2)$ é o ponto de máximo e $\left(\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ são os pontos de mínimo de f sobre D.