Gabarito da Terceira Prova
MAT-2454 - Tipo A

21 de Novembro de 2011

Questão 1. (3,0) Seja r a reta tangente, no ponto $(1,-1,1)$, à curva que é a intersecção do gráfico de $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2+2}{3}$ com a superfície de equação $x^2+y^2+z^2-6x+y+z+3=0$. Considere a função $G(x,y,z) = x^2y+y^3+xz-z+z^2$. Sabe-se que a direção de máximo crescimento de G, num ponto P, é paralela à reta r.

Determine P, a direção e sentido de maior crescimento de G em P e a maior taxa de variação de G nesse ponto.

• $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2+2}{3}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4}{3}x^3y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2}{3}x^4y$.

Um vetor normal ao gráfico de f em $(1,-1,1)$ é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1), -1\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right) = \frac{1}{3}(4,-2,-3)$$

Seja $h(x,y,z) = (2x-6, 2y+1, 2z+1)$ e um vetor normal à superfície de nível 0 de h em $(1,-1,1)$ é $\nabla h(1,-1,1) = (-4,-1,3)$.

Logo, um vetor diretor de r é

$$(4,-2,-3) \wedge (-4,1,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-9,0,-12) = -3(3,0,4)$$

Agora, G é diferenciável. Logo, a direção de maior crescimento de G num ponto $P = (x_0,y_0,z_0)$ é $\nabla G(x_0,y_0,z_0) = (2x_0y_0+z_0, x_0^2+3y_0^2, x_0-1+2z_0)$

Queremos $(2x_0y_0+z_0, x_0^2+3y_0^2, x_0-1+2z_0) = \lambda(-3,0,4)$, isto é,

$$\begin{cases} 2x_0y_0+z_0 = 3\lambda \\ x_0^2+3y_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0 \\ x_0-1+2z_0 = 4\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0 = 3\lambda \\ -1+2z_0 = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4z_0 = -12\lambda \\ -3+6z_0 = 12\lambda \end{cases}$$

$$2z_0 = 3 \Rightarrow z_0 = \frac{3}{2}.$$

• Ponto: $P = (0,0,3/2)$

• Direção e sentido de maior crescimento: $\nabla G(0,0,3/2) = (3/2, 0, 2)$

• Taxa de variação máxima: $\|(3/2,0,2)\| = \sqrt{9/4+4} = 5/2$

Questão 2. (3,5) Determine os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = xz + 2y$ em S, onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 + xz + y^2 = 25 \text{ e } y \geq 2\}$. (Obs.: Você pode admitir, sem justificar, que o problema tem solução.)

Seja (x, y, z) ponto de máximo ou de mínimo de f em S

1º caso: $y > 2$. Nesse caso, $\nabla f(x,y,z)$ é paralelo a $(2x+z, 2y, 2z+x)$. Logo

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z & 2 & x \\ 2x+z & 2y & 2z+x \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Portanto

$$\begin{cases} 2z^2 = 2x^2 \\ 2(2z+x) = 2xy \\ 2(2x+z) = 2zy \\ x^2 + z^2 + xz + y^2 = 25 \\ y > 2 \end{cases}$$

e temos

$$① \begin{cases} z = x \\ 6x = 2xy \\ 3x^2 + y^2 = 25 \\ y > 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad ② \begin{cases} z = -x \\ -2x = 2xy \\ x^2 + y^2 = 25 \\ y > 2 \end{cases}$$

Se $x = 0$, temos, em ① ou ②, que $z = 0$ e $y = 5$

Se $x \neq 0$ temos

$$① \begin{cases} z = x \\ y = 3 \\ z = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad ② \begin{cases} z = -x \\ y = -1 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ y > 2 \end{cases} \text{ que não tem solução}$$

Os possíveis pontos são $P_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 3, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $P_2 = \left(\frac{-4}{\sqrt{3}}, 3, \frac{-4}{\sqrt{3}}\right)$,
$P_3 = (0, 5, 0)$

2º caso: $y=2$. Nesse caso, (x,z) é ponto de máximo ou de mínimo de $h(x,z)=f(x,2,z)=xz+4$, na curva de equação $x^2+z^2+xz=21$. Logo $\nabla h(x,z)$ é paralelo a $(2x+z,\ 2z+x)$. Assim, $\begin{vmatrix} z & x \\ 2x+z & 2z+x \end{vmatrix}=0$

e temos $\begin{cases} x^2=z^2 \\ x^2+z^2+xz=21 \end{cases}$

Portanto $x=z=\pm\sqrt{7}$ ou $x=-z=\pm\sqrt{21}$

Os possíveis pontos são $P_4=(\sqrt{7}, 2, \sqrt{7})$, $P_5=(-\sqrt{7}, 2, -\sqrt{7})$, $P_6=(\sqrt{21}, 2, -\sqrt{21})$, $P_7=(-\sqrt{21}, 2, \sqrt{21})$

$f(P_1)=f(P_2)=6+\frac{16}{3}=\frac{34}{3}$

$f(P_3)=10<\frac{34}{3}$

$f(P_4)=f(P_5)=11<\frac{34}{3}$

$f(P_6)=f(P_7)=4-21=-17$

O valor máximo de f em S é $\frac{34}{3}$ e o valor mínimo de f em S é -17.

Questão 3. Seja $f(x,y) = (y^2-4)(x^2-5x+6)+5x^2-8x$.

(1,5) a) Dados os pontos $(2,-4)$, $(4,0)$ e $(2,4)$, decida quais deles são pontos de máximo local, de mínimo local ou ponto de sela de f.

(2,0) b) Determine os valores máximo e mínimo de f em D, onde D é a região do plano delimitada pelo retângulo de vértices $(-7,-2)$, $(0,-2)$, $(0,2)$ e $(-7,2)$.

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y^2-4)(2x-5)+10x-8 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y)(x^2-5x+6) = 0 \qquad \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 3 \end{cases}$$

$(y=0) \Rightarrow (-4)(2x-5)+10x-8 = 0 \Rightarrow x = -6$

$(x=2) \Rightarrow (y^2-4)(-1)+20-8 = 0 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = -4$ ou $y = 4$

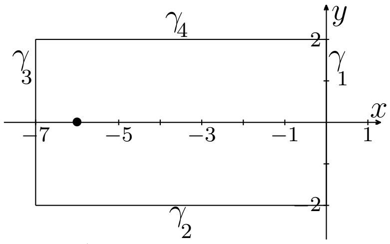
$(x=3) \Rightarrow (y^2-4)(1)+30-8 = 0 \Rightarrow y^2+18 = 0$ (não convém)

Portanto, os únicos pontos críticos de f são $(-6,0)$, $(2,-4)$ e $(2,4)$. Isso implica que $(4,0)$ não é ponto crítico de f.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} (y^2-4)(2)+10 & 2y(2x-5) \\ 2y(2x-5) & 2(x^2-5x+6) \end{vmatrix}$$

$$H(2,-4) = \begin{vmatrix} 34 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \Rightarrow (2,-4) \text{ é ponto de sela.}$$

$$H(2,4) = \begin{vmatrix} 34 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \Rightarrow (2,4) \text{ é ponto de sela.}$$

b) 

Pelo item (a) sabemos que $(-6,0)$ é o único ponto crítico de f pertencente à D.

Sejam

$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = f(0,t) = (t^2-4)6,\ -2 \leq t \leq 2,$

$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = f(t,-2) = 5t^2 - 8t,\ -7 \leq t \leq 0,$

$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = f(-7,t) = (t^2-4)90 + 301,\ -2 \leq t \leq 2,$

$g_4(t) = f(\gamma_4(t)) = f(t,2) = 5t^2 - 8t,\ -7 \leq t \leq 0.$

Temos,

$g_1'(t) = 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0),$

$g_2'(t) = 10t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \geq 0,$ (não convém),

$g_3'(t) = 180t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow (x,y) = (-7,0),$

$g_4'(t) = 10t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \geq 0.$ (não convém).

Finalmente, temos que:

$f(-6,0) = -60,$

$f(0,0) = -24,$

$f(-7,0) = -59,$

$f(-7,-2) = 301,$

$f(0,-2) = 0,$

$f(0,2) = 0,$

$f(-7,2) = 301.$

Ou seja, o valor máximo de f em D é 301 e o valor mínimo de f em D é -60.

Gabarito da Terceira Prova
MAT-2454 - Tipo B

21 de Novembro de 2011

Questão 1. (3,0) Seja r a reta tangente, no ponto $(-1,1,1)$, à curva que é a intersecção do gráfico de $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2+2}{3}$ com a superfície de equação $x^2+y^2+z^2+6x-y+z+3=0$. Considere a função $G(x,y,z) = x^2y+y^3+xz-z+z^2$. Sabe-se que a direção de máximo crescimento de G, num ponto P, é paralela à reta r.

Determine P, a direção e sentido de maior crescimento de G em P e a maior taxa de variação de G nesse ponto.

$f(x,y) = \dfrac{x^4y^2+2}{3}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4}{3}x^3y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^4y}{3}$

Um vetor normal ao gráfico de f em $(-1,1,1)$ é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1), -1\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -1\right) = \frac{1}{3}(-4,2,-3)$$

Seja $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+6x-y+z+3$. Então h é diferenciável, $\nabla h(x,y,z) = (2x+6, 2y-1, 2z+1)$ e um vetor normal à superfície de nível 0 de h em $(-1,1,1)$ é $(4,1,3)$.

Logo, um vetor diretor de r é

$$(-4,2,-3)\wedge(4,1,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9,0,-12) = 3(3,0,-4)$$

Agora, G é diferenciável. Logo, a direção de maior crescimento de G num ponto $P=(x_0,y_0,z_0)$ é $\nabla G(x_0,y_0,z_0) = (2y_0x_0+z_0, x_0^2+3y_0^2, x_0-1+2z_0)$

Queremos $(2x_0y_0+z_0, x_0^2+3y_0^2, x_0-1+2z_0) = \lambda(3,0,-4)$, isto é,

$$\begin{cases} 2x_0y_0+z_0 = 3\lambda \\ x_0^2+3y_0^2 = 0 \Rightarrow x_0=y_0=0 \\ x_0-1+2z_0 = -4\lambda \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} z_0 = 3\lambda \\ -1+2z_0 = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z_0 = 12\lambda \\ -3+6z_0 = -12\lambda \end{cases}$$

$$10z_0 = 3 \rightarrow z_0 = \frac{3}{10}$$

- Ponto: $P = \left(0,0,\frac{3}{10}\right)$
- Direção e sentido de maior crescimento: $\nabla G(0,0,3/10) = (3/10, -2/5)$
- Taxa de variação máxima: $\|(3/10, 0, -2/5)\| = \frac{1}{2}$

Questão 2. (3,5) Determine os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = yz + 2x$ em S, onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 + yz + x^2 = 25 \text{ e } x \geq 2\}$. (Obs.: Você pode admitir, sem justificar, que o problema tem solução.)

Seja (x,y,z) ponto de máximo ou de mínimo de f em S.

1º caso: $x > 2$. Nesse caso, $\nabla f(x,y,z)$ é paralelo a $(2x, 2y+z, 2z+y)$. Logo

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & z & y \\ 2x & 2y+z & 2z+y \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Portanto

$$\begin{cases} 2z^2 = 2y^2 \\ 2(2y+z) = 2xz \\ 2(2z+y) = 2xy \\ x^2 + y^2 + z^2 + yz = 25 \\ x > 2 \end{cases}$$

e temos

$$① \begin{cases} z = y \\ 6z = 2xz \\ 3z^2 + x^2 = 25 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad ② \begin{cases} z = -y \\ -2z = 2xz \\ x^2 + z^2 = 25 \\ x > 2 \end{cases}$$

Se $z = 0$, temos em ① ou ②, que $x = 5$ e $y = 0$

Se $z \neq 0$, temos

$$① \begin{cases} z = y \\ x = 3 \\ z = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad ② \begin{cases} z = -y \\ x = -1 \\ x^2 + z^2 = 25 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{que não tem solução}$$

Os possíveis pontos são $P_1 = \left(3, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, 2º caso : $x = 2$. Nesse caso, (y, z) é ponto de máximo ou de mínimo de $h(y, z) = f(2, y, z) = 4 + yz$ na curva de equação $y^2 + yz + z^2 = 21$. Logo $\nabla h(y, z)$ é paralelo a $(2y+z, 2z+y)$. Assim $\begin{vmatrix} z & y \\ 2y+z & 2z+y \end{vmatrix} = 0$

e temos $\begin{cases} y^2 = z^2 \\ y^2 + yz + z^2 = 21 \end{cases}$

Portanto $y = z = \pm\sqrt{7}$ ou $y = -z = \pm\sqrt{21}$

Os possíveis pontos são $P_4 = (2, \sqrt{7}, \sqrt{7})$, $P_5 = (2, -\sqrt{7}, -\sqrt{7})$, $P_6 = (2, \sqrt{21}, -\sqrt{21})$, $P_7 = (2, -\sqrt{21}, \sqrt{21})$.

$f(P_1) = f(P_2) = 6 + \frac{16}{3} = \frac{34}{3}$

$f(P_3) = 10 < \frac{34}{3}$

$f(P_4) = f(P_5) = 11 < \frac{34}{3}$

$f(P_6) = f(P_7) = 4 - 21 = -17$

O valor máximo de f em S é $\frac{34}{3}$ e o valor mínimo de f em S é -17

Questão 3. (3,5) Seja $f(x,y) = (y^2-4)(x^2-6x+8)+5x^2-10x$.

a) Dados os pontos $(2,-3)$, $(5,0)$ e $(2,3)$, decida quais deles são pontos de máximo local, de mínimo local ou ponto de sela de f.

b) Determine os valores máximo e mínimo de f em D, onde D é a região do plano delimitada pelo retângulo de vértices $(-8,-2)$, $(0,-2)$, $(0,2)$ e $(-8,2)$.

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y^2-4)(2x-6)+10x-10 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y)(x^2-6x+8) = 0 \qquad\qquad \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 4 \end{cases}$$

$(y=0) \Rightarrow (-4)(2x-6)+10x-10 = 0 \Rightarrow x = -7$

$(x=2) \Rightarrow (y^2-4)(-2)+20-10 = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = -3$ ou $y = 3$

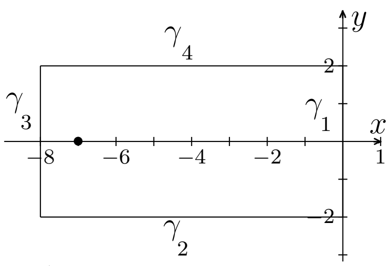
$(x=4) \Rightarrow (y^2-4)(2)+20-10 = 0 \Rightarrow y^2+1 = 0$ (não convém)

Portanto, os únicos pontos críticos de f são $(-7,0)$, $(2,-3)$ e $(2,3)$. Isso implica que $(5,0)$ não é ponto crítico de f.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} (y^2-4)(2)+10 & 2y(2x-6) \\ 2y(2x-6) & 2(x^2-6x+8) \end{vmatrix}$$

$$H(2,-3) = \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0 \Rightarrow (2,-3) \text{ é ponto de sela.}$$

$$H(2,3) = \begin{vmatrix} 20 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0 \Rightarrow (2,3) \text{ é ponto de sela.}$$

b) 

Pelo item (a) sabemos que $(-7,0)$ é o único ponto crítico de f pertencente à D.

Sejam

$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = f(0,t) = (t^2 - 4)8,\ -2 \leq t \leq 2,$

$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = f(t,-2) = 5t^2 - 10t,\ -8 \leq t \leq 0,$

$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = f(-8,t) = (t^2 - 4)120 + 400,\ -2 \leq t \leq 2,$

$g_4(t) = f(\gamma_4(t)) = f(t,2) = 5t^2 - 10t,\ -8 \leq t \leq 0.$

Temos,

$g_1'(t) = 16t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0),$

$g_2'(t) = 10t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \geq 0.$ (não convém),

$g_3'(t) = 240t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow (x,y) = (-8,0),$

$g_4'(t) = 10t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \geq 0.$ (não convém).

Finalmente, temos que:

$f(-7,0) = -81,$

$f(0,0) = -32,$

$f(-8,0) = -80,$

$f(-8,-2) = 400,$

$f(0,-2) = 0,$

$f(0,2) = 0,$

$f(-8,2) = 400.$

Ou seja, o valor máximo de f em D é 400 e o valor mínimo de f em D é -81.